Fyzikálny korešpondenčný seminár
3. ročník, 2009/2010
UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://ufo.fks.sk

Vzorové riešenia 2. kola letnej časti 2009/2010

2.1 Dvojfľašie (opravovali Aďa a Filip)

Do stredu špagátu dĺžky l zaveste závažie o hmotnosti $0{,}5\,\mathrm{kg}$, napríklad pollitrovú fľašu s vodou. Jeden koniec špagátu teraz pevne pripevnite (napríklad o nohu stola) a druhý koniec vodorovne potiahnite silou $20\,\mathrm{N}$ (obr.). Ako hlboko pod koncami špagátu sa nachádza závažie? Ako táto hĺbka závisí od dĺžky špagátu, ktorý použijete? Zostrojte graf s aspoň 4 rôznymi dĺžkami špagátu a skúste výsledky nejako vysvetliť. Hint: Sila $20\,\mathrm{N}$ zhruba odpovedá tiaži dvojlitrovej fľaše plnej vody.

Špagátik priviažeme o stôl a druhý koniec o dvojlitrovú fľašu. Teraz prevesíme špagát ponad stoličku a fľašu pustíme dolu. Tým sa nám celý špagát napne silou $20\,\mathrm{N}$ a môžeme merať.

Zadanie nám hovorí, nech preskúmame závislosť hĺbky od dĺžky špagátiku. Tu ste robili chybu. Dĺžka špagátiku na obrázku v zadaní nie je to isté, ako dĺžka nášho špagátiku. V zadaní sa pod dĺžkou myslí dĺžka špagátiku medzi dvoma úchytmi v rovnakej výške. V našom prípade to teda zodpovedá len dĺžke špagátiku medzi stolom a stoličkou. Asi nám uveríte, že tá hĺbka nebude vôbec závisieť od toho, koľko špagátiku pretŕča na druhej strane stoličky.

Meranie budeme robiť tak, že posunieme stoličku do vzdialenosti $2d$ od stola. Hĺbku odmeriame ľahko, stačí si napríklad natiahnuť vodorovný špagátik medzi úchytmi a z neho spustiť pravítko. Dĺžku špagátiku l už vyrátame ľahko ako súčet dvoch prepon Pytagorovho trojuholníka s odvesnami d a h. Uvedomme si však, že tá jedna odvesna d je skoro rovnako dlhá ako prepona l, a teda približne platí $2d = l$.

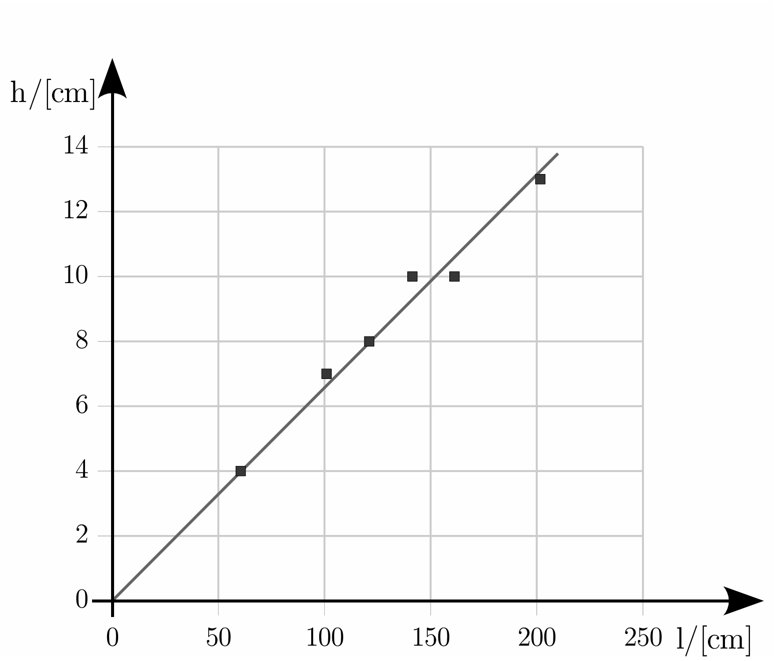
My sme namerali takéto hodnoty:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
dĺžka špagátiku (cm)	60	100	120	140	160	200
hĺbka (cm)	4	7	8	10	10	13

Tab. 1: Namerané hodnoty

Namerané hodnoty sme vyniesli do grafu. Všimnite si hlavne, že na os nanášame mierku, nie konkrétne hodnoty. Každá os je označená a má tam aj jednotky, v akých sa daná veličina meria. Nakoniec, po nanesení hodnôt do grafu sa nám zdá, že by to mohla byť priamka, čo čoskoro zdôvodníme. Pozor, body v grafe nespájame! Namiesto toho tam narysujeme priamku tak, aby išla čo najbližšie okolo nameraných hodnôt.

Seminár podporujú:



Obr. 1: Závislosť hĺbky od dĺžky špagátiku

Zamyslime sa nad výsledkom. Politrová fľaša stojí, výslednica pôsobiacich síl na ňu je teda nulová. A aké to sily na ňu pôsobia? Dolu ju ťahá gravitácia, špagátiky ju zas ťahajú každý svojím smerom silou 20 N. Do hora teda pôsobí výslednica tých dvoch špagátikov, čiže ich vektorový súčet. Veľkosť výslednice zjavne závisí od vzájomného uhla a má byť práve taká, aby vyrovnala tiaž fľaše – vždy rovnaká, a preto sa ten uhol meniť nemôže. Všety trojuholníky sú si teda podobné – pre dvojnásobný trojuholník dostaneme teda aj dvojnásobnú hĺbku.

2.2 Galiba (opravovali Janka, Tatika a Bea)

Kubíčkovi sa tento semester stala galiba , v jeho izbe sa zabývala tchorica s mladými. Kým sa situácia dá do poriadku, býva Kubíček 10 km za mestom, a do školy sa kazdé ráno vozí na kajaku po rieke Temži. Kubus je známy závodník a po pokojnej hladine dokáze trieliť sympatickou rýchlosťou 20 km/h. Cesta do mesta a späť by mu teda mala trvať rovnú hodinu. Realita je však iná, a oproti tomuto času sa Kubíček omeškáva vždy o 10 minút. Dôvodom je prúd rieky, ktorý mu pri ceste do mesta pomáha, cestou naspäť ho však brzdí.

a) Aká rýchla je Temža v miestach, kde po nej Kubíček kajakuje?

b) Je možné, aby rieka svojím prúdom pomáhala absolvovať celkovú cestu za kratší čas ako za jednu hodinu?

Ahojte, vítam Vás pri sledovaní dnešných správ zo športu. I keď počasie dnes nevypálilo úplne najlepšie závodník Kubus sa blíži do mesta. Stihne dnes ujsť pred smradom a včas dôjsť do… chrrrr… alebo… vrrr…? Asi vypadlo spojenie vysielania. Tak sa budem musieť s Vami porozprávať ja.

Prečo Kubíkovi trvá cesta dlhšie ako hodinu? Však to už bolo povedané. Dôvodom je prúd rieky, ktorý mu pri ceste do mesta pomáha, cestou naspäť ho však brzdí. Ako to? Nech je Kubíkova rýchlosť voči vode v_K a rýchlosť vody v_v a vzdialenosť mesta s. Smerom do mesta sa Kubíkova rýchlosť v_K voči brehu zväčší o rýchlosť vody v_v, lebo tieto rýchlosti majú rovnaký smer a zložia sa dokopy. V smere z mesta domov je Kubíkova rýchlosť zmenšená o rýchlosť v_v.

Cesta do mesta mu teda bude trvať $t_1 = s/(v_\mathrm{K} + v_\mathrm{v})$, cesta späť $t_2 = s/(v_\mathrm{K} - v_\mathrm{v})$. Spolu to je:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s}{v_\mathrm{K} + v_\mathrm{v}} + \frac{s}{v_\mathrm{K} - v_\mathrm{v}}\,.$$

Z tejto rovnice sa budeme snažiť vyjadriť v_v, všetky ostatné písmenká poznáme. My si to vyjadríme všeobecne (písmenkami), ak sa vám to však zdá ťažké, môžete si všade miesto písmeniek dosadiť číselnú hodnotu a skúsiť vyjadrovať tak.

Prenásobíme rovnicu výrazom $(v_\mathrm{K}+v_\mathrm{v})(v_\mathrm{K}-v_\mathrm{v})$, aby sme sa zbavili zlomkov na pravej strane.

$$t(v_\mathrm{K} + v_\mathrm{v})(v_\mathrm{K} - v_\mathrm{v}) = s(v_\mathrm{K} - v_\mathrm{v}) + s(v_\mathrm{K} + v_\mathrm{v})\,,$$

po roznásobení:

$$tv_\mathrm{K}^2 - tv_\mathrm{v}^2 = 2sv_\mathrm{K}\,.$$

Teda:

$$v_\mathrm{v}^2 = (tv_\mathrm{K}^2 - 2sv_\mathrm{K})/t\,. \tag{1}$$

Odmocníme a dostaneme:

$$v_\mathrm{v} = \sqrt{v_\mathrm{K}^2 - 2sv_\mathrm{K}/t}\,.$$

Po dosadení číselných hodnôt:

$$v_\mathrm{v} = \sqrt{(20\,\mathrm{km/h})^2 - 2\cdot 10\,\mathrm{km}\cdot 20\,\mathrm{km/h}/\left(\tfrac{7}{6}\,\mathrm{h}\right)} \approx 7{,}6\,\mathrm{km/h}$$

Takže voda v miestach, kde sa Kubíček pohybuje tečie rýchlosťou približne 7,56 km/h.

Bolo treba odmocňovať, čo sa mnohý z Vás ešte neučili. Ale určite viete, že keď vynásobíme číslo $x = 10$ znovu číslom 10, vieme to zapísať $x^2 = 100$. Vy ste mali robiť niečo opačné. Mali ste číslo $x^2 = 100$ a mali ste nájsť x. Mohli ste skusmo ťukať do kalkulačky, že aké číslo x treba vynásobiť samo sebou, aby ste dostali číslo 100. Ak ste to nerobili, tak na Vás mladších budeme mäkkí.

Riešme ešte druhú časť úlohy. Ak by mala voda Kubíkovi pomáhať, musela by mu cesta trvať menej ako, keby šiel po pokojnej vode. Teda $t < t_\mathrm{K} = 2s/v_\mathrm{K}$. Skúsme to dosadiť do rovnice (1). Dostaneme:

$$v_\mathrm{v}^2 = v_\mathrm{K}^2 - t_\mathrm{K}v_\mathrm{K}^2/t\,.$$

Avšak $t < t_\mathrm{K}$, na pravej strane dostaneme záporné číslo![1] To však nie je možné, lebo žiadne číslo po vynásobení samým sebou nevie dať záporné číslo a teda ľavá strana sa nemôže rovnať pravej. Také v_v jednoducho neexistuje. Kubíčkovi voda nevie pomôcť. Najviac by mu Temža pomohla ak by netiekla vôbec.

[1]Kto to nevidí, môže si skúsiť dosadiť číselné hodnoty.

A načo Kubíček tak trieli do mesta? No predsa stravovať sa do závodnej jedálne :-)

2.3 Luskáčik (opravovali Dada a Halucinka)

„Kríza – nekríza, dačo robiť treba“, povedal si podnikateľ Cyprián a vynašiel nový dizajn luskáčiku na orechy. A keďže Cypriána múza kopla skutočne dôsledne, vymyslel luskáčik ešte jeden. Obe jeho veľdiela si môzte pozreť na obr. a obr. . Ktorým z nich rozlúskneme orech menšou vynaloženou silou a prečo? Celkové dĺžky ramien luskáčikov sú v oboch prípadoch rovnaké, takisto rovnaké sú vzdialenosti od kĺbu spájajúceho ramená po miesto, kde sa orech dotýka ramien.

Oba luskáčiky sú len obyčajné páky. Aby sme príklad vedeli vyriešiť, ujasnime si, ako funguje rovnováha na páke.

Rovnováha na páke: Veličina, ktorá popisuje, aký veľký otáčavý účinok má sila na páku sa volá moment sily. Označuje sa M a počíta sa tak, že vynásobíme silu pôsobiacu kolmo na páku so vzdialenosťou miesta, kde pôsobí, od osi otáčania páky. Na to, aby bola páka v rovnováhe, sa musia momenty sily otáčajúce páku do jedného smeru rovnať momentom síl otáčajúcim páku do druhého smeru.

Nech napríklad na páku pôsobia dve sily, F_x vo vzdialenosti x od kĺbu a F_y vo vzdialenosti y od kĺbu. Aby páka mohla byť v rovnováhe, musí platiť:

$$xF_x = yF_y\,.$$

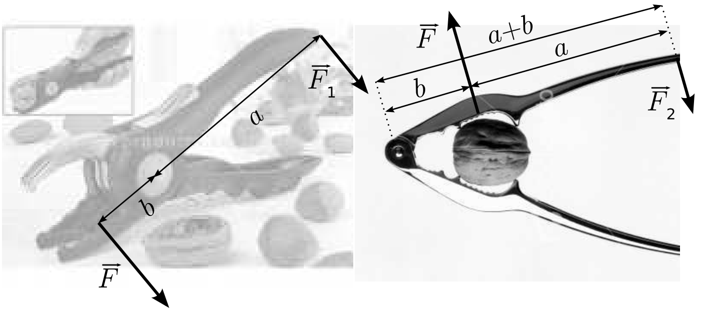
Riešenie: Označme si a dĺžku od rukoväte prvého luskáčika po kĺb a b dĺžku od kĺbu po orech, F silu potrebnú na rozlúsknutie orecha a F_1, F_2 sily, ktorými musíme pôsobiť na prvý a druhý luskáčik, aby sme rozlúskli orechy. Z rovnováhy na páke potom dostávame pre prvý luskáčik rovnicu:

$$bF = aF_1 \Rightarrow F_1 = \frac{b}{a}F\,.$$

Pri druhom luskáčiku je dĺžka od orecha po kĺb b, no a od kĺbu po rúčku je to $a + b$. Takže preň dostávame rovnicu:

$$bF = (a + b)F_2 \Rightarrow F_2 = \frac{b}{a + b}F$$

Teraz vidíme, že $F_1 > F_2$, keďže F_1 má menšieho menovateľa. Teda menej sa budeme namáhať s luskáčikom dva.



Obr. 2: Sily pôsobiace na oba lukáčiky

Komentár: Niektorí ste si označili dĺžku celého druhého luskáčika ako a. Ak ste to však zrátali dobre, tak ste mali plný počet bodíkov. Pár bodíkov sme strhávali za nedostatočný opis toho, čo robíte. Bolo síce pekné vidieť na papieri zrátaný moment sily, ale prečo? načo? aspoň jedno Bu, Mu, odpoveď, popis čo robíte by sa zišiel. Ale celkovo ste to mali skoro všetci dobre, akurát sme smutní, že sa rozmohlo opisovanie:(. Pekné skoroprázdniny:-).

2.4 Roztápačka (opravoval Marek, vzorák Samo)

Je známe, že pokiaľ máme pohár po okraj naplnený vodou a v ňom pláva kus ľadu, voda ani po roztopení ľadu nepretečie cez okraj pohára.

a) Vysvetlite, prečo je to tak.

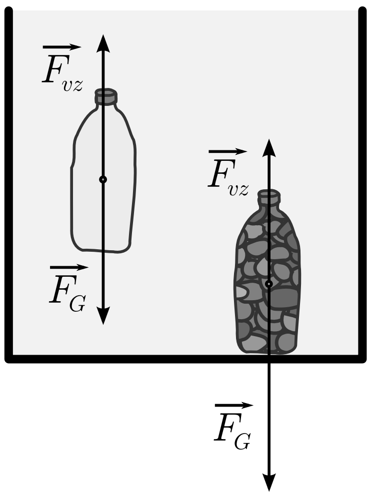
b) Pretiekla by nejaká kvapalina, keby ľad plával namiesto vody v oleji?

Hustoty použitých záležitostí sú: $\rho_{\text{voda}} = 1\,000\,\text{kg/m}^3$, $\rho_{\text{lad}} = 900\,\text{kg/m}^3$, $\rho_{\text{olej}} = 950\,\text{kg/m}^3$.

Na vyriešenie tejto úlohy je potrebné poznať *Archimedov zákon*. Keďže ho asi všetci nepoznáte, v nasledujúcej časti si ho vysvetlíme.

Archimedov zákon: Keď ponoríme predmet do vody, voda naň bude zo všetkých strán tlačiť svojím tlakom. Čím hlbšie sa nachádzame, tým väčší tento tlak bude, to je aj dôvod, prečo sa potápači nemôžu ponárať do ľubovoľne veľkej hĺbky – ich telo by ten tlak nevydržalo.

Predstavme si kocku ponorenú vo vode. Jej spodná stena je hlbšie ako vrchná a ako sme si povedali, hlbšie je vo vode väčší tlak. Celková sila, ktorou voda pôsobí na kocku teda nebude nulová, ale bude smerovať nahor. Táto výsledná sila, ktorou voda pôsobí na predmet, má meno *vztlaková sila*.



Obr. 3: Fľaša s vodou a fľaša s kameňmi ponorené vo vode

Teraz si ukážeme, ako vztlakovú silu spočítať. Predstavte si tenkostennú plastovú fľašu naplnenú vodou, ako je tá na obrázku. Fľaša sa bude vo vode vznášať, prakticky sa totiž jedná o vodu vo vode a voda vo vode sa predsa vznáša. To však znamená, že v rovnováhe sú vztlaková sila pôsobiaca na fľašku a tiažová sila pôsobiaca na vodu v nej. Keby sme teraz z fľaše vodu vyliali a naplnili ju niečim iným (kamene, drevo, ...), zmenila by sa tiažová sila, ale *vztlaková sila musí zostať rovnaká*! Voda sa totiž nevie „pozrieť" dovnútra a meniť vztlakovú silu podľa toho, čo vo fľaši je. Slávny Archimedov zákon teda znie: *Na teleso ponorené vo vode pôsobí vztlaková sila, ktorá je rovnako veľká ako tiažová sila, ktorá by pôsobila na ponorenú časť telesa, keby bolo z vody.*

Riešenie: Pohár je naplnený až po okraj vodou a pláva v ňom ľad. Archimedov zákon nám hovorí, že *tiaž ľadu je rovnako veľká, ako tiaž vody s objemom* rovným objemu *ponorenej časti ľadu*. Po roztopení dostaneme vodu, ktorej tiaž bude rovnaká, ako tiaž ľadu, ktorý sa topil. Z toho vyplýva, že jej objem bude rovnaký, ako bol objem ponorenej časti ľadu.[2] Inak povedané, objem ponorenej časti ľadu je taký istý ako objem vody, ktorá vznikne roztopením celého ľadu, preto sa hladina vody v pohári nezdvihne.

Ak dáme do pohára namiesto vody olej, tak po roztopení dostaneme vodu, ktorej tiaž bude rovnaká, ako tiaž oleja s objemom ponorenej časti ľadu. Lenže voda má väčšiu hustotu ako olej. Takže objem vody s tiažou rovnou tiaži oleja objemu ponorenej časti ľadu je menší ako objem ponorenej časti ľadu.[3] Teda roztopením ľadu dostaneme menší objem vody, ako bol objem ponorenej časti ľadu, preto hladina dokonca poklesne.

[2] Pozorne si čítajte tieto vety dokola, kým ich nepochopíte.
[3] Ďalšia krkolomná veta, čítajte, kým nepochopíte.

Výsledková listina po 2. kole letnej časti 2009/2010

	Meno	Škola	Roč.	1	2	3	4	♡	Σ_2	Σ
1	Jaroslava Kokavcová	ZŠ MRŠ	7.	8	9	9	9	0,53	35,53	71,53
2	Eduard Batmendijn	CGSM	8.	8	9	9	9	0,28	35,28	71,28
3	Martin Kotian	ZŠ Moravany	7.	9	9	9	9	0,00	36,00	69,92
4	Irena Bačinská	G Lipany	8.	9	9	4	9	1,24	32,24	68,24
5	Jozef Bucko	ZŠ H. Otrokovce	8.	5	9	9	9	1,02	33,02	66,82
6	Lukáš Ivan	G BA J.Hronca	8.	9	5	9	7	1,44	31,44	66,72
7	Miroslav Gašparek	CZŠ sv. Marg.	8.	8	9	9	5	1,24	32,24	66,03
8	Adam Škrlec	ZŠ Ostredková	7.	6	9	9	2	3,90	29,90	64,92
9	Andrej Kluka	G Piešťany	7.	4	8	9	9	2,70	32,70	64,75
10	Matúš Jenča	ZŠ Karloveská	8.	7	9	9	9	0,54	34,54	64,34
11	Barbora Velichová	ZSJGT	8.	8	9	6	9	1,02	33,02	63,65
12	Lucia Polakova	GStr	6.	6	7	9	4	3,90	29,90	63,23
13	Cindy Baloghová	ZŠ Vráble	8.	7	7	9	1	2,30	26,30	62,30
14	Matej Ralbovský	GŠB	8.	8	7	9	5	1,62	30,62	62,06
15	Radka Kováčová	G Piešťany	8.	6	9	9	4	1,79	29,79	62,03
16	Pavlína Hodulová	G Piešťany	8.	5	9	9	4	1,94	28,94	61,97
17	Hana Krakovská	G BA Grösslingova	8.	5	9	8	–	2,46	24,46	57,49
18	Ivana Bohuncakova	ZŠ Vikartovce	7.	7	1	8	3	4,85	23,85	56,55
19	Marek Krul	ZSMH	7.	7	–	9	4	4,80	24,80	53,12
20	Maros Polovka	OG Kukučínova Poprad	6.	3	8	6	4	4,73	25,73	51,45
21	Martin Perešíni	ZŠ Radvanská	9.	5	7	8	1	0,00	21,00	50,00
22	Simona Pcolova	G Snina	8.	1	7	4	7	2,58	21,58	47,89
23	Nikoleta Kuklova	ZS Top	7.	4	5	2	2	4,49	17,49	47,39
24	Stanislava Vassova	G Snina	8.	1	7	4	7	2,58	21,58	46,05
25	Lukas Gelo	G Snina	8.	1	7	9	7	2,30	26,30	45,89
26	František Dráček	ZŠ D.Mariková	8.	3	4	1	6	2,46	16,46	44,54
27	Alexandra Beckova	ZS Top	7.	2	4	2	2	3,90	13,90	38,70
28	Stanislav Bednár	G BA J.Hronca	8.	–	–	–	–	0,00	0,00	33,02
29	Karin Sabova	ZS Top	7.	2	5	2	2	4,13	15,13	32,61
30	Jana Kubusová	ZŠ Vikartovce	9.	–	–	–	–	0,00	0,00	28,00
31	Marian Longa	ŠPMNDAG	6.	–	–	–	–	0,00	0,00	24,80
32	Natália Krempaská	ZŠ Vikartovce	9.	–	–	–	–	0,00	0,00	22,00
33	Peter Klausman	ZŠ ĽŠ Šaľa	8.	–	–	–	–	0,00	0,00	21,58
34	Peter Turansky	SFA	8.	–	–	–	–	0,00	0,00	16,46
35	Maria Dubenova	SFA	7.	–	–	–	–	0,00	0,00	12,65
36	Christian Farkas	ZŠ ĽŠ Šaľa	8.	–	–	–	–	0,00	0,00	12,08
36	Patrik Slarka	SFA	8.	–	–	–	–	0,00	0,00	12,08
38	Zuzana Sisovska	ZS Top	7.	2	–	2	2	2,70	8,70	8,70
39	Ema Krakovská	G BA Grösslingova	8.	3	6	8	*	-41,42	-24,42	6,21
40	Samuel Hapák	FMFI UK	15.	–	–	–	–	0,00	0,00	0,00