

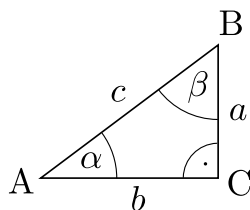
UFOčebnica: Rozkladanie síl

Milí riešitelia!

Aj v tomto školskom roku vám prinášame sériu poučných textov. Veríme, že sa z nich veľa naučíte. Ak náhodou nie, tak to určite preto, že to už všetko viete ;-). Ako ste si už možno všimli, texty dostali cool názov – UFOčebnica. Narozdiel od školských učebníc v UFOčebnici chýbajú nudné poučky, pretože všetko vysvetľujeme tým najjednoduchším možným spôsobom. Tak príjemné čítanie!

Pravouhlý trojuholník

Tak nazývame trojuholník, ktorý má práve jeden uhol pravý (rovný 90°). Keďže súčet všetkých uhlov v trojuholníku je 180° , je jasné, že oba zvyšné uhly musia byť menšie, ako pravý uhol. Jeden pekný pravouhlý trojuholník môžeme vidieť na obrázku.



Obr. 1: Trojuholník

Práve pravouhlý trojuholník má isté záhadné vlastnosti. Jednou z najdôležitejších vôbec je to, že veľkosti uhlov α a β jednoduchým spôsobom súvisia s dĺžkami strán a , b (odvesny) a c (prepona). Nebudeme kráčať okolo horúcej kaše, a preto si tie vzťahy rovno vypíšme:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \sin \beta = \frac{b}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c}.$$

Divné skratky $\sin$ a $\cos$ čítame sínus a kosínus a nie je na nich vlastne nič divné. Znamenajú len toľko, že pre každý uhol vieme na kalkulačke vypočítať jeho sínus alebo kosínus.

Všimnime si, že vo vzťahoch pre sínusy vystupujú *protiľahlé* strany k uhlom a pre kosínusy zasa strany *priľahlé*. Toto pravidlo je hodné zapamätania:

$$\sin = \frac{\text{protiľahlá}}{\text{prepona}}, \quad \cos = \frac{\text{priľahlá}}{\text{prepona}}.$$

Ak tieto dve rovnice vydelíme, dostaneme vzťah pre pomer protiľahlej a priľahlej odvesny

$$\tan = \frac{\sin}{\cos} = \frac{\text{protiľahlá}}{\text{priľahlá}}.$$

Seminár podporujú:



iuventa

Skratka $\tan$ znamená tangens a je to naozaj jednoducho sínus vydelený kosínusom. Úplne detailné vysvetlenie tejto trojuholníkovej mágie sa dozviete na strednej škole alebo na sústredku. Nám zatiaľ stačí vedieť, že ak poznáme nejaký uhol v pravouhlom trojuholníku, vieme, aký musia byť pomery odvesien k preponu.

Nakoniec si ešte spomeňme, že v pravouhlom trojuholníku platí oveľa slávnejšia formula, ktorá bola známa už v starovekom Grécku. Tam si všimli, že ak zmeriame dĺžky strán a , b a c v pravouhlom trojuholníku a všetky ich umocníme na druhú, tak zistíme, že platí prekvapujúco jednoduchý vzorec

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Stavím sa s vami, že tento vzorec ste už niekde videli — áno, je to slávna Pytagorova veta.

Predstavme si, že Jarka doma odmeria, že jej trojuholník má dĺžky strán 3 cm, 4 cm a 5 cm. A nie je nič ľahšie, ako vypočítať

$$(3 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm})^2 = 9 \text{ cm}^2 + 16 \text{ cm}^2 = 25 \text{ cm}^2 = (5 \text{ cm})^2.$$

Jarkin trojuholník teda spĺňa Pytagorovu vetu – je pravouhlý s preponou dlhou 5 cm a odvesnami dlhými 3 cm a 4 cm. No ale pravouhlý trojuholník spĺňa tiež vzťahy so sínusom a kosínusom, napr.

$$\sin \alpha = \frac{3 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 0.6, \quad \sin \beta = \frac{4 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 0.8.$$

Pomocou tlačítok $\sin^{-1}$ a $\cos^{-1}$ vieme zistiť, pre aký uhol je hodnota sínusu rovná hľadaným 0.6 alebo 0.8. Vyskúšajte si to! Vyšlo vám $\alpha = 36.9^\circ$ a $\beta = 53.1^\circ$?

Prečo rozkladáme sily

No ozaj, prečo? Sily totiž nemajú len veľkosť, ale majú aj smer. Mimochodom veličiny, u ktorých je dôležitý aj ich smer, nazývame vektorové. My sa bežne stretávame s prípadmi, kedy sú vektory rôznych síl potvorné a pôsobia vo veľa rôznych smeroch. Našou úlohou je tieto sily nejako skrotiť, to znamená zistiť, aké sú všetky sily veľké, respektíve ako hýbu telesom, na ktoré pôsobia.

9 z 10 fyzikov vám povie, že sily na krotia najlepšie tak, že sa pozeráme, ako pôsobia v nejakých smeroch. Predstavme si najskôr, že všetky sily môžu pôsobiť len vodorovne alebo zvislo. Vodorovné sily sa snažia hýbať telesom len vo vodorovnom smere, zvislé len v zvislom smere. Úlohu si teda vieme rozdeliť na dve podstatne jednoduchšie úlohy – jedna pre zvislé a druhá pre vodorovné sily.

Ak je súčet síl pôsobiacich smerom nahor rovnaký ako súčet síl smerujúcich nadol, teleso sa v zvislom smere nebude podľa 1. Newtonovho zákona pohybovať. To znamená, že nebude klesať ani stúpať.¹

Ak je naše teleso tabuľka čokolády a podložka stôl, je podmienka o nepohybovaní celkom zrejímavá – stačí letný pohľad na čokoládu a vidíme, že čokoláda sa neponára do

¹Poznámka pre puntičkárov: Druhá možnosť je, že teleso sa v tomto smere bude pohybovať rovnomerným priamočiarym pohybom.

stola a ani nešartuje ako raketa. Preto musí byť súčet zvislých síl, ktoré pôsobia na čokoládu, nulový. Sily, ktoré pôsobia v zvislom smere, sú dve: tiažová sila $F_g = mg$ a sila, ktorou pôsobí podložka. Túto silu si označme F_n . Sily pôsobia v opačných smeroch, takže, aby bola splnená podmienka nepohybovania sa v zvislom smere, musí platiť

$$mg = F_n.$$

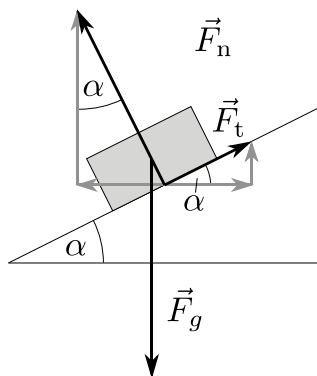
Tým pádom vieme presne povedať, aká veľká je neznáma sila F_n ! Sily v zvislom smere sú skrotené a my si za odmenu môžeme dať spomínanú čokoládu.

Rozklad síl v praxi

Často sa nám ale môže stať, že sily sú odporné a pôsobia všelijako šikmo. Takže nejakým spôsobom sa premietajú do oboch smerov. Vtedy nastupuje krása sínusov a kosínusov, pretože sily si vieme krásne rozkladať. A to si ukážeme na nasledujúcom príklade:

Máme čokoládu, ktorá leží na naklonenej rovine s uhlom α . Keďže sa tam čokoláda drží sama, medzi ňou a rovinou musí pôsobiť trenie, ktoré je popísané koeficientom trenia f . My by sme radi vedeli, aký najmenší môže byť tento koeficient, aby sa čokoláda na naklonenej rovine udržala a neskĺzla preč.

Najskôr sa pozrime, aké sily na čokoládu pôsobia. To, že čokoláda sa môže zošmyknúť, spôsobuje gravitačná sila F_g , ktorá pôsobí zvislo nadol. Zároveň na čokoládu pôsobí podložka normálovou silou F_n a nakoniec aj trecia sila (proti smeru možného pohybu čokolády) F_t . Sily F_n a F_t však pôsobia všelijako šikmo, takže okamžité rozloženie do vodorovného a zvislého smeru nebude možný. Obe sily totiž pôsobia trochu dohora, ale aj trochu do strán, viď obrázok.



Obr. 2: Rozloženie síl

V ňom vidíme, že napríklad silu F_n môžeme rozložiť do sily, ktorá pôsobí doľava a silu, ktorá pôsobí hore. Tieto tri sily dokopy ale tvoria pravouhlý trojuholník! A – čudujasvete – v tom trojuholníku vieme nájsť uhol α !² Preto môžeme použiť magické pravidlá pre pravouhlé trojuholníky a sily si pomocou funkcií sínus a kosínus rozložíme na ich vodorovné (x -ové) a zvislé (y -ové) zložky, s ktorými sa nám bude ľahšie pracovať:

$$F_{nx} = F_n \sin \alpha, \quad F_{tx} = f F_n \cos \alpha,$$

$$F_{ny} = F_n \cos \alpha, \quad F_{ty} = f F_n \sin \alpha.$$

Ako vidíte, pre treciu silu platí, že je to vlastne len normálová sila násobená koeficientom trenia. Keď už sme si takto pekne rozložili sily, môžeme napísať podmienky pre to, aby čokoláda ostala v pokoji – vodorovné aj zvislé zložky sa musia navzájom kompenzovať, aby celková výslednica síl bola nulová. Pre zvislé sily môžeme písať

$$F_{ny} + F_{ty} = F_g,$$

$$F_n \cos \alpha + f F_n \sin \alpha = mg.$$

²Na nájdenie všetkých uhlov s veľkosťou α sme použili poučku o striedavých a vrcholových uhloch, ale aj fakt, že súčet uhlov v trojuholníku je 180° . Skúste si to!

Pre vodorovné sily zasa platí

$$F_{nx} = F_{tx},$$

$$F_n \sin \alpha = f F_n \cos \alpha.$$

Z rovnosti horizontálne pôsobiacich síl už vidíme, že koeficient trenia je rovný pomeru medzi sínusom a kosínusom uhlu α . Tento pomer je ale tangens uhlu α :

$$f = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha.$$

Teraz vytiahnite kalkulačky, tangens nájdete hneď vedľa sínusu a kosínusu. Skúste vypočítať, aký je teda najmenší koeficient f pre uhol $\alpha = 35^\circ$. Aj vám vyšlo $f = 0.7$?

Druhé, trochu šikovnejšie riešenie tejto úlohy spočíva v triku, že nemusíme vždy pracovať len s horizontálnymi a vertikálnymi zložkami síl. Keby sme na začiatku rozložili sily v smere rovnobežnom a kolmom na naklonenú rovinu, musíme rozkladať len gravitačnú silu. Zložka sily F_g kolmá na rovinu bude mať potom rovnakú veľkosť ako normálová sila a rovnobežná zložka bude pôsobiť proti trecej sile. Znova si môžeme zapísať rovnováhu síl v oboch smeroch a voilà – vieme si vyjadriť f :-).

Dobré rady na záver

Rozkladanie síl nie je ťažké, no zide sa vedieť zopár trikov:

Trik prvý. Rozkladať vieme nielen sily pôsobiace šikmo na vodorovné a zvislé, ale aj vodorovné a zvislé na šikmé, presne tak, ako sme to spomínali v závere príkladu o čokoláde.

Trik druhý. Uhly sú nezbedné a musíme si dávať dobrý pozor, aby sme sa v nich nezamotali. Kľudne si do náčrtov dokreslite zopár pomocných trojuholníkov, aby ste si boli istí, kde sa daný uhol nachádza.

Trik tretí. Pri rozklade síl sa nám môže zdať, že niektorá zo zložiek (ako v prípade vertikálnych zložiek v obrázku vyššie) zmenila bod pôsobenia. Celý rozklad síl je však hlavne o matematike (vektoroch), z hľadiska fyziky je dôležité vedieť že aj zložky síl pôsobia vždy v rovnakom bode, ako rozkladaná sila.

Príklad

Keď bol raz Samo v bani, skúsil si ťažkú prácu baníkov. Do ruky dostal lano a za úlohu vytiahnuť banský vozík hore rampou. Aby sa lano neroztrhlo, na vrchole rampy prechádzalo kladkou.

- a) Akou vodorovnou silou F musí Samo ťahať lano, aby sa vozík začal pohybovať hore rampou?
- b) Aký koeficient šmykového trenia f musí byť medzi Samovými topánkami a podlahou v bani, aby sa Samovi pri jeho urputnej práci nešmyklo?

Vozík váži 100 kg, Samo 70 kg. Kolieska vozíka sú dobre naolejované a teda otáčajú sa bez trenia. Uhol, ktorú zvierá rampa s vodorovným smerom je $\alpha = 20^\circ$.

Riešenie