Fyzikálny korešpondenčný seminár
7. ročník, 2013/2014
UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://ufo.fks.sk

Seriál: Rozmýšľajme!

Milí riešitelia,

v minulom texte sme sa naučili, akými písmenami a číslami sa vo fyzike bežne stretávame, aké jednotky používame a prečo je dôležité tieto veci ovládať. Človek by povedal, že to príliš zaváňa matematikou. Na jednej strane je pravda, že bez matematiky by sa fyzika takmer neobišla, ale na druhej strane fyzika rozhodnie nie je len o dosádzaní do vzorcov, ktoré vieme naspamäť. Vo fyzike vieme na veľa správnych záverov prísť tak, že použijeme len zdravý rozum.

Práve fyzika je úžasná v tom, že veľa vecí si vieme *predstaviť*, alebo ich vieme odpozorovať z reálneho života. Narozdiel od matematiky, kde nevieme jednoducho povedať, či sa x rovná 5, vo fyzike vieme povedať, že rýchlosť vlaku rovná milimeter za storočie asi dobre vypočítaná nebude. Vieme totiž posúdiť, či má vzťah, ktorý sme niekde našli, alebo vypočítali, *fyzikálny zmysel*.

Odhadovanie závislostí

Ak nám niekto naservíruje nejaký vzťah, o ktorom tvrdí, že je správny, tak si to vieme overiť, aj keď postup, akým k svojmu výsledku prišiel, je pre nás španielska dedina.

Prvá vec, nad ktorou sa môžeme zamyslieť je, od čoho tento vzťah závisí, alebo by závisieť mal. Ukážme si to na príklade zrýchleného pohybu: chceme zistiť, akú dráhu sme prešli za čas t. Rozum nám hovorí, že to určite nebude zrýchlenie vynásobené časom, a to rovno z dvoch dôvodov. Po prvé, takýto vzorec by nám nesedel jednotkovo. Po druhé, čím dlhšie zrýchľujeme, tým máme väčšiu rýchlosť. Nebude preto asi platiť, že za dvojnásobný čas prejdeme dvojnásobnú dráhu. Vo vzorci bude teda čas vystupovať vo vyššej mocnine (možno t^3, ktovie...) alebo ako nejaká komplikovanejšia funkcia.

V niektorých prípadoch ale naopak vieme jasne povedať, na ktorých veličinách závisí náš hľadaný vzťah *lineárne*, teda v prvej mocnine. Pomôžeme si jednoduchým trikom – spýtame sa, čo by sa stalo, ak by sa táto veličina zdvojnásobila. Zdvojnásobí sa aj výsledná veličina? Ak áno, závislosť je s vysokou pravdepodobnosťou lineárna. Opäť príklad: niekto nám povedal, že vztlaková sila je závislá na objeme, ale v druhej mocnine. Môžeme takémuto tvrdeniu veriť?

Predstavme si, že si teda zoberieme nejaký predmet s objemom V a ponoríme ho do vody. Bude naň pôsobiť vztlaková sila F. Potom si zoberieme druhý takýto predmet a tiež ho ponoríme do vody, tj. bude naň pôsobiť rovnaká sila F. Nič nám nebráni predmety pod vodou zlepiť. Budú teda predstavovať jeden predmet s objemom $2V$, na ktorý pôsobí sila

$F + F = 2F$. Krásna lineárna závislosť – vzťah s V^2 teda určite neplatí. Vo všeobecnosti môžeme povedať, že ak vieme objekty takto podobne „sčítavať“, tak výsledný vzťah je vzhľadom na sčítanú veličinu lineárny.[1]

Varovanie: Niekedy sa aj intuícia môže pomýliť: asi by sme očakávali, že auto idúce rýchlosťou $2v$ má dvojnásobnú pohybovú energiu oproti autu idúcemu rýchlosťou v. Takéto tvrdenie bohužiaľ neplatí. Prečo? Nie je pravda, že ak máme dve rovnaké autá idúce rýchlosťou v, tak ich zlepením dostaneme jedno auto idúce dvojnásobnou rýchlosťou. Naopak – dostaneme auto s dvojnásobnou hmotnosťou, ktoré ide rýchlosťou v. Čiže pohybová energia je lineárna práve v hmotnosti, ale nie v rýchlosti.

Je to symetrické?

Veľa vecí vo fyzike sa deje symetricky, teda rovnako pre dva opačné pohľady. A platí, že symetrické deje musia spĺňať symetrické vzťahy.

Znova si to celé ukážeme na jednoduchom príklade, a to priemernej rýchlosti: chceme vypočítať priemernú rýchlosť v, ak sme čas t_1 išli rýchlosťou u_1 a druhú časť išli rýchlosťou u_2 a to po dobu t_2. Tento príklad je symetrický v tom, že môžeme prehodiť poradie rýchlostí. Teda ak najskôr pôjdeme čas t_2 rýchlosťou u_2 a až potom čas t_1 rýchlosťou u_1, tak by sme mali očakávať, že priemerná rýchlosť bude nezmenená, pretože prejdená dráha bude tak či tak rovnaká, rovnako ako celkový čas. Výsledný vzorec pre priemernú rýchlosť by mal teda spĺňať, že ak vymeníme u_1 za u_2 a t_1 za t_2, tak so vzorcom to nič neurobí. Správny vzorec pre výpočet priemernej rýchlosti túto vlastnosť, čudujsasvete, spĺňa:

$$v = \frac{u_1 t_1 + u_2 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{u_2 t_2 + u_1 t_1}{t_2 + t_1}$$

Ohýbanie vzorcov cez latu

Začnime rovno príkladom. Pozrime sa na takýto vzťah:

$$E = \frac{1}{2} \frac{mM}{M + m} v^2$$

Vzorec udáva, akú energiu musí spáliť auto na lodi na to, aby sa voči nej pohybovalo rýchlosťou v. Hmotnosť auta je m a hmotnosť lode je M. Ako zistiť, či má tento vzorec vôbec zmysel? Musí sa zhodovať s našou skúsenosťou.

Je jasné, že rozdiel medzi idúcim autom na súši a lodi je ten, že okrem auta sa pohybuje aj loď. Vysvetlenia ponúkame hneď dve – na to, aby sa auto vôbec na lodi rozbehlo, musí sa pneumatikami zapierať do lode, čím ju určite (síce nebadane, ale predsa) roztlačí. Druhý argument, prečo sa loď pohybuje, je zachovanie polohy ťažiska.[2]

S takýmto pohybom lode však veľké skúsenosti nemáme. Omnoho bližší je nám pohyb auta po súši, kedy bude energia pohybujúceho sa auta rovná známej hodnote $\frac{1}{2}mv^2$.

[1] Ak sa chcete naučiť nové slovo, tak odborne tento trik nazývame princíp superpozície.

[2] Toto je už o trochu ťažší fyzikálny princíp, ale v skratke: zvonku na sústavu loď – auto nepôsobia žiadne sily, preto by malo ťažisko ostať v pokoji (alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe).

Vidíme, že tento a náš problematický vzorec majú nejaké veci spoločné. To je ale jasné, pretože popisujú prakticky tú istú vec. Aj v prípade pohybu auta po súši musí platiť, že auto sa musí do Zeme zapierať. Avšak oproti autíčku a lodi má Zem omnoho (teda skoro nekonečno) krát väčšiu hmotnosť. Skúsme preto do nášho vzorca dosadiť za M nejaké obrovské číslo. Ako správni fyzici, v súčte $M + m$ potom môžeme hmotnosť m zanedbať, pretože bude oproti M naozaj malička. Tým pádom sa nám v čitateli a v menovateli sa hmotnosti Zeme vykrátia a tadá: dostávame známy jednoduchý vzorec! Ak by sme dostali niečo iné, náš zadaný vzorec by bohužiaľ správny nebol.

Takéto – a mnohé iné hrania sa so vzorcami nazývame skúmanie okrajových podmienok. Slúžia na odhalenie chýb: ak nám podobnou logickou úvahou vo vzorci vyjde nejaký nezmysel (napríklad, že raketa s nulovou hmotnosťou sa začne sama zavŕtavať do zeme), vzorec je pravdepodobne nesprávny. Okrem zmien hmotnosti si môžeme predstavovať nulové odpory, veľké polomery, všetky dĺžky rovné 1 meter a podobne. Predstavivosti sa medze nekladú.

Odhady

Posledný spôsob, ako si nájsť vo svojich výpočtoch chybu, je odhad, približne aký veľký bude výsledok a porovnať ho znova s našimi skúsenosťami. Ak nám vyjde, že nejaká sústava bude v tiažovom poli zrýchľovať rýchlejšie ako je gravitačné zrýchlenie g, alebo rovina môže byť naklonená o 80 stupňov, tak takéto výsledky sú s veľmi veľkou pravdepodobnosťou nesprávne.

Popísali sme si teda 4 zaujímavé spôsoby, ako sa zamýšľať nad fyzikou bez toho, aby sme bezducho verili vzťahom, ktoré nám niekto strká pod nos. Takéto zamýšľanie je veľmi užitočné, preto je dôležité, aby ste si ho aspoň trochu osvojili. Ak budete niekedy v budúcnosti počítať úlohy do Ufa, spomeňte si, že ste práve spoznali veľmi silný prostriedok na odhaľovanie chýb. Volá sa váš rozum.

Rozumné kladky

Cez kladku máme prehodené lano, na ktorého koncoch sú oň uviazané dve závažia s hmotnosťami m a M. Teraz závažia pustíme a zaujíma nás, s akým zrýchlením bude zrýchľovať závažie s hmotnosťou M.

a) $a = \frac{M+m}{M-m}g$

b) $a = \frac{Mm}{M+m}g$

c) $a = \frac{1}{2}\frac{M-m}{M+m}g$

d) $a = \frac{1}{3}\frac{m}{M}g$

e) $a = (M+m)\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m}\right)g$

Ktoré z týchto výsledkov nemôžu byť dobre? Nezabudnite, že rozmer zrýchlenia a je rovnaký ako rozmer gravitačného zrýchlenia g.

Riešenie

1) **rozmerová analýza**
Na to, aby bola rovnica platná, musia mať hodnoty na oboch stranách rovnaké jednotky. Keďže zrýchlenie a a gravitačné zrýchlenie g majú rovnakú jednotku ($\mathrm{m \cdot s^{-2}}$), musíme z jednej strany rovnice odstrániť prebytočné jednotky hmotností m a M (v kg). To znamená, že ich potrebujeme nejakým spôsobom vykrátiť. Pri sčitovaní dvoch hmotností má výsledná hodnota rovnakú jednotku: kg. Zmena nastáva pri násobení, kde je jednotka logicky $\mathrm{kg^2}$ (podobne ako pri obsahu: $\mathrm{m \cdot m = m^2}$). Samotné čísla vo vzorcoch sú bezrozmerné, teda nemajú jednotky. Týmto spôsobom nahradíme všetky premenné ich jednotkami a ak je to možné, vykrátime ich.

a)
$$a = \frac{M+m}{M-m} \cdot g \to \mathrm{m \cdot s^{-2}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}} \cdot \mathrm{m \cdot s^{-2}} = \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,,$$

b)
$$a = \frac{Mm}{M+m} \cdot g \to \mathrm{m \cdot s^{-2}} = \frac{\mathrm{kg \cdot kg}}{\mathrm{kg}} \cdot \mathrm{m \cdot s^{-2}} = \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}\,,$$

c)
$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{M-m}{M+m} \cdot g \to \mathrm{m \cdot s^{-2}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}} \cdot \mathrm{m \cdot s^{-2}} = \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,,$$

d)
$$a = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{M} \cdot g \to \mathrm{m \cdot s^{-2}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}} \cdot \mathrm{m \cdot s^{-2}} = \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,,$$

e)
$$a = (M+m) \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \cdot g \to \mathrm{m \cdot s^{-2}} = (\mathrm{kg} + \mathrm{kg}) \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{kg}} + \frac{1}{\mathrm{kg}}\right) \cdot \mathrm{m \cdot s^{-2}} =$$
$$= \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}} \cdot \mathrm{m \cdot s^{-2}} = \mathrm{m \cdot s^{-2}}\,,$$

2) **extrémna situácia**
Čo by sa stalo, ak by jedno závažie (M) bolo veľmi ťažké a druhé veľmi ľahké ($m = 0$)? Na ťažké závažie pôsobí gravitačná sila, a keďže ľahké závažie ho nebrzdí (je tak ľahké, že ho môžeme zanedbať), bude padať voľným pádom ($a = g$). Poďme sa pozrieť, či to platí aj pri našich výsledkoch:

a)
$$a = \frac{M+m}{M-m} \cdot g = \frac{M}{M} \cdot g = g$$

b)
$$a = \frac{M \cdot m}{M+m} \cdot g = a = \frac{0}{M} \cdot g = 0$$

c)
$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{M-m}{M+m} \cdot g = a = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{M} \cdot g = a = \frac{g}{2}$$

d)

$$a = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{M} \cdot g = \frac{1}{3} \cdot \frac{0}{M} \cdot g = 0$$

e)

$$a = (M+m) \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \cdot g = \left(\frac{m}{m} + \frac{m}{M} + \frac{M}{m} + \frac{M}{M}\right) \cdot g = \left(\frac{0}{M} + \frac{M}{0} + 2\right) \cdot g \rightarrow \text{deliť 0 sa nedá}$$

Jediný výsledok, ktorý spĺňa podmienku, je a).

3) **extrémna situácia**
A čo by sa stalo, kebyže sú obidve závažia rovanko ťažké ($M = m$)? Vieme predsa, že by mala nastať rovnováha, teda závažia nezrýchľujú ($a = 0$).

a)

$$a = \frac{M+m}{M-m} \cdot g = \frac{m+m}{m-m} \cdot g \rightarrow \text{opäť delenie 0 (nedá sa)}$$

b)

$$a = \frac{M \cdot m}{M+m} \cdot g = \frac{m \cdot m}{m+m} \cdot g = \frac{m}{2} \cdot g \rightarrow \text{ak } m \neq 0, \text{ potom } a \neq 0$$

c)

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{M-m}{M+m} \cdot g = \frac{1}{2} \cdot \frac{m-m}{m+m} \cdot g = 0$$

d)

$$a = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{M} \cdot g = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{m} \cdot g = \frac{g}{3}$$

e)

$$a = (M+m) \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \cdot g = (m+m) \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m}\right) \cdot g = 2m \cdot \frac{2}{m} \cdot g = 4g$$

Jediný výsledok, ktorý spĺňa podmienku, je c).

Keďže ani jeden výsledok neprešiel všetkými podmienkami, ani jeden nie je správny (správny výsledok je $a = \frac{M-m}{M+m} \cdot g$).

Hodnotenie Každý spôsob kontroly bol ohodnotený 3 bodmi.