

UFOčebnica: Zrýchlenia

Milí riešitelia!

Aj v tejto sérii vám opäť prinášame UFOčebnicu, ktorou jemne nadviažame na tú predchádzajúcu. V predchádzajúcej UFOčebnici sme skúmali pohyb telies s konštantnou rýchlosťou v rôznych *inerciálnych* vzťažných sústavách. Tentokrát sa pozrieme na to, ako opísať pohyb telesa v inerciálnej vzťažnej sústave, ktoré sa pohybuje po priamke, no jeho rýchlosť sa v čase mení. Konkrétne sa budeme zaoberať najjednoduchším možným prípadom, a to takým, kde rýchlosť v čase rovnomerne narastá alebo klesá.

Čo je to vlastne zrýchlenie?

Predtým, než budeme skúmať pohyby, pri ktorých sa rýchlosť telesa v čase mení, budeme musieť predstaviť novú fyzikálnu veličinu, ktorou budeme opisovať spomínané zmeny rýchlosti. Tou veličinou je *zrýchlenie*, ktoré nám hovorí, o koľko sa zmení rýchlosť telesa za jednotku času

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Podobne ako rýchlosť, aj zrýchlenie je vektorová veličina. V UFOčebnici sa stretneme iba so zrýchleniami, ktorých vektor je rovnobežný s vektorom rýchlosti. No vo všeobecnosti tomu tak byť nemusí. Taktiež sa budeme zaoberať iba pohybmi, pri ktorých je zrýchlenie konštantné. To znamená, že veľkosť *okamžitej rýchlosti* bude lineárnou funkciou času.

Všimnite si, že sme zaviedli nový pojem *okamžitej rýchlosti*. Chceme ním zdôrazniť, že sa zaujímame o rýchlosť, ktorú má teleso naozaj práve iba v danom okamihu. Zavádzame ju taktiež preto, aby sme si ju nemýlili s *priemernou rýchlosťou*. Síce aj pomocou priemernej rýchlosti vieme čo-to o pohybe zistiť, no občas nám takáto informácia neposkytuje všetko. Pripomíname, že *priemerná rýchlosť* telesa počas nejakého časového intervalu je definovaná ako podiel *celkovej dráhy*, ktorú prejde teleso počas nejakého časového úseku a dĺžky tohto úseku.

Takže ako to je s tým rovnomerným zrýchlením? Predstavme si zrýchľujúce auto, ktoré má v čase t rýchlosť v_0 . Keďže zrýchľuje zrýchlením a , v čase t' , tj. po uplynutí času $t' - t$, bude jeho rýchlosť o $a(t' - t)$ väčšia. Rýchlosť auta v tomto čase bude teda $v = v_0 + a(t' - t)$. Ak naviac čas začneme merať od okamihu, kedy auto malo rýchlosť v_0 , tak rýchlosť auta v čase bude mať nasledovný predpis

Ďakujeme sponzorom a podporovateľom seminára:

$$v(t) = v_0 + at.$$

Asi vás zaujíma, ako sa zrýchlenie prejaví na dráhe? Ak auto zrýchľuje, jeho dráha bude rastieť rýchlejšie, než ak by sa pohybovalo rovnomerne. Zrýchlenie je teda dôležitou veličinou, ktorá nám umožňuje popísať pohyby, ktoré nie sú rovnomerné. Zrýchlenie je teda dôležitou veličinou, ktorá nám umožňuje popísať pohyby, ktoré nie sú rovnomerné.



PosAm



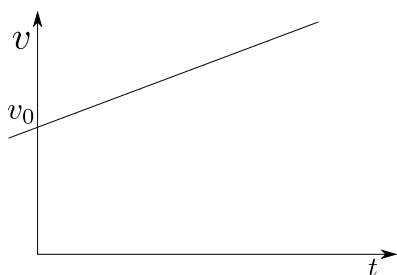
mô-

aute v čase pre kladné a záporné zrýchlenie.

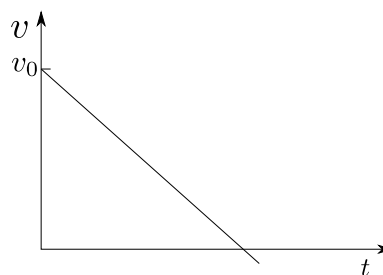


iuventia





Obr. 1: Závislosť rýchlosti od času pre $a > 0$

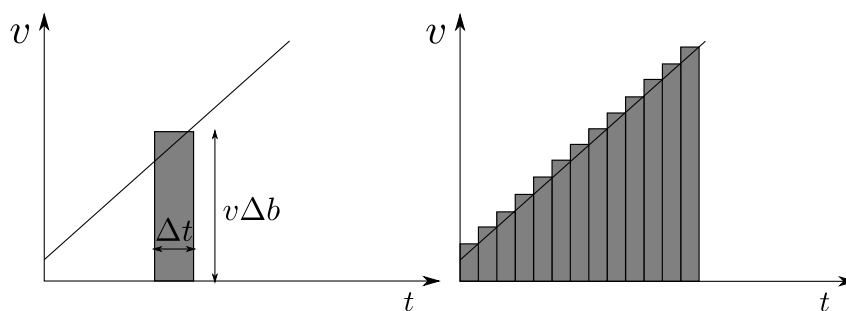


Obr. 2: Závislosť rýchlosti od času pre $a < 0$

Rovnomerné priamočiare zrýchlené pohyby

Pohyby, pri ktorých je zrýchlenie konštantné a vektor zrýchlenia je rovnobežný s vektorom rýchlosti sa odborné nazývajú *rovnomerne priamočiare zrýchlené pohyby*. To, že rýchlosť je pri takomto pohybe lineárnou funkciou času sme si už ukázali. Zostáva nám ešte vyriešiť, ako na čas závisí prejdená vzdialenosť.

V prípade, kedy bola rýchlosť telesa konštantná, čiže zrýchlenie nulové, bola prejdená vzdialenosť lineárnou funkciou času. Teraz zrýchlenie nie je nulové, ale konštantné, takže lineárnou funkciou času je rýchlosť. Pozrime sa na malý časový úsek Δt a aproximujme aj rýchlosť počas tohoto úseku ako konštantu. To môžeme urobiť, pretože za maličký čas Δt sa rýchlosť v skutočnosti zmení len nepatrne. Za tento malý časový úsek prejde auto vzdialenosť $v(t)\Delta t$, ktorá je vlastne plochou obdĺžnika so stranami Δt a $v(t)\Delta t$ (viď obrázok). Ak rozdelíme celý pohyb auta na takéto malé úseky Δt , tak prídeme na to, že dráha, ktorú auto prejde, je rovná ploche pod grafom rýchlosti v čase. My vám prezradíme, že tento záver platí úplne všeobecne, teda aj v prípadoch, aj keby rýchlosť nebola lineárnou funkciou.



Obr. 3

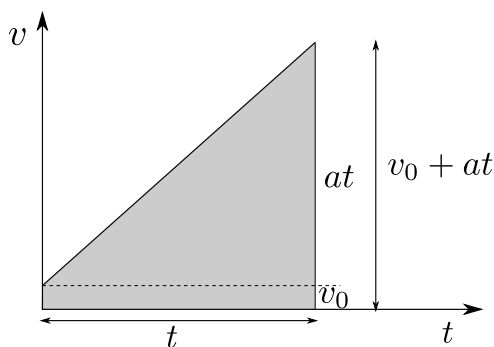
Vrážme sa späť k rovnomerne trýchleným pohybom. V prípade, že počiatočná rýchlosť (prejdená vzdialenosť v čase $t = 0$) bola nulová, plocha pod grafom rýchlosti v čase bude mať tvar pravouhlého trojuholníka so stranami t a at (nakreslite si). Prejdená dráha je preto

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{ak } v_0 = 0.$$

V prípade, že $v_0 \neq 0$, tak ide o plochu lichobežníka so základňami v_0 a $v_0 + at$ a výškou t , takže prejdenná vzdialenosť bude

$$s = \frac{1}{2} (v_0 + (v_0 + at)) t = v_0 t + \frac{1}{2} at^2.$$

K rovnakému výsledku by sme sa dopracovali aj vtedy, keď $v_0 < 0$. Ak je zrýchlenie záporné, čiže rýchlosť lineárne klesá v čase, nami objavený vzorec zostáva stále v platnosti. Skúste si nakresliť príslušné diagramy a sami si to overiť.



Obr. 4

Ako súvisí zrýchlenie telesa so silou, ktorá naňho pôsobí?

Prezradíme, že zrýchlenie má veľký súvis so silou, ktorá pôsobí na teleso, resp. s vektorovým súčtom síl pôsobiach na teleso. Bližšie sa s týmto faktom zoznámite na strednej škole, no nie je to nič ťažké, a preto si myslíme, že to zvládnete už aj teraz :-). Konkrétne si predstavíme prvé dva *Newtonove pohybové zákony*.¹

Najskôr sa zamyslime nad nasledujúcou otázkou: akou silou musíme pôsobiť na teleso, aby sme udržali jeho rýchlosť konštantnú. Intuícia nám napovedá, že na to určite nejakú silu potrebujeme. Ale to iba preto, lebo v reálnom svete sa vyskytujú rôzne trecie a odporové sily. V ideálnom svete by sme žiadnu silu nepotrebovali. A to nám hovorí aj *prvý Newtonov zákon*, ktorý doslova hovorí, že teleso zotrvaáva v pokoji alebo v rovnomernom priamočiariom pohybe vtedy, keď vektorový súčet síl, ktoré naň pôsobia, je nulový. Tento pohybový zákon sa zvykne volať aj *zákonom zotrvačnosti*.

Druhý Newtonov pohybový zákon sa týka zrýchlenia. V podstate hovorí, že zrýchlenie telesa je priamo úmerné vektorovému súčtu pôsobiach na teleso a nepriamo úmerné *zotrvačnosti telesa*. Teda čím má teleso väčšiu zotrvačnosť, tým menší bude mať výsledná sila efekt. Mieru zotrvačnosti telesa nazývame hmotnosť. Matematicky možno tento zákon zapísať ako

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Takže, ak poznáme sily pôsobiace na teleso, vieme určiť jeho zrýchlenia. A zo zrýchlenia už vieme určiť jeho rýchlosť a dokonca aj prejdennú dráhu.

¹https://cs.wikipedia.org/wiki/Newtonovy_pohybové_zákony

Záver

V tomto čísle UFOčebnice sme si predstavili zrýchlené pohyby. Ukázali sme si, že rýchlosť sa pri týchto pohyboch v čase mení. Odvodili sme, že ak vieme nakresliť graf rýchlosti v čase, tak pomocou plochy po týmto grafom určíme prejdenú dráhu. Pre najjednoduchší prípad – rovnomerne zrýchlený pohyb – sme si ukázali, ako vyzerá graf rýchlosti v čase a ako s jeho pomocou odvodíme vzorec pre dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu. Úplne nakoniec sme spojili celú mechaniku dohromady pomocou Newtonových zákonov, ktoré spájajú sily a pohyb telies do veľmi jednoduchých vzťahov. Aj vy musíte uznať, že mechanika je úžasná. No nie?

Príklad

Samko a Helboj sa rozhodli znovu si zmerať sily. Keďže na Pezinskej Babe tohto roku veľa snehu nebolo, chcelo to nejakú zmenu. Samko dostal nápad, že pôjdu na motokáry.

Ich „preteky“ vyzerali nasledovne. Oba sa posadili do motokár a začali pretekať. No tu nastal menší problém. Motokáry, ktoré si vybrali, neboli rovnako výkonné. Samkova motokára dokázala zrýchľovať so zrýchlením a a brzdiť so spomalením² taktiež veľkosti a . Helbojov pekelný stroj dokázal vyvinúť zrýchlenie až $2a$, a taktiež dokázal spomaľovať so spomalením veľkosti $2a$.

Samko s Helbojom sa teraz hádajú, aké kritéria majú zvoliť, aby boli preteky férové pre oboch. Skúšali tieto možnosti:

- Oba budú rovnaký čas T zrýchľovať a potom rovnako dlhý čas T spomaľovať. Bod získa ten, kto prejde dlhšiu dráhu. V prípade remízy získajú bod obaja.
- Helboj bude čas T zrýchľovať a rovnako dlhý čas spomaľovať. Samko bude zrýchľovať čas $2T$ a spomaľovať tiež čas $2T$. Bod získa ten, kto dosiahne vyššiu priemernú rýchlosť. V prípade remízy získajú bod obaja.
- Helboj bude nejaký čas zrýchľovať a potom rovnaký čas spomaľovať. Samko bude tiež najprv chvíľu zrýchľovať a potom rovnako dlho spomaľovať. Oba pri tom budú jazdiť tak, aby prešli rovnako dlhú dráhu d . Bod získa ten, komu to bude trvať kratší čas. V prípade remízy získajú bod obaja.

Vo všetkých prípadoch nakreslite pre obe motokáry závislosť okamžitej rýchlosti³ od času. Následne nakreslite závislosť prejdenej dráhy od času. Taktiež určte priemerné rýchlosti⁴ motokár v jednotlivých prípadoch. Vyhral Samko alebo Helboj?

²Záporné zrýchlenie znamená, že rovnomerne zrýchlene spomaľujeme.

³To znamená rýchlosti, ktorou sa motokára pohybovala v danom momente.

⁴Priemerná rýchlosť je definovaná ako podiel celkovej dráhy, ktorú prejde motokára a času, počas ktorého sa pohybovala alebo počas ktorého nás priemerná rýchlosť zaujíma.

Riešenie