

Riešenia 1. kola zimnej časti

1.1 Prefikovaný dátum

vzorák Tomáš, opravoval Tomáš

Poznámka: Vzorák počíta s niektorými detailmi, ktoré môže byť celkom ťažké nájsť. Ak ich vo vašom riešení nemáte, ale inak dáva zmysel, môžete očakávať plný počet bodov.

Asi ste už počuli, že dátum Veľkej noci má niečo spoločné s jarnou rovnodennosťou a so splnom. Po krátkom hľadaní viete zistiť, že pravidlo Rímskokatolíckej cirkvi (aj viacerých ďalších) je takéto: **Veľkonočná nedeľa je prvá nedeľa nasledujúca po dni prvého splnu, ktorý je v deň jarnej rovnodennosti alebo neskôr.** Na základe historických zdrojov cirkev predpokladá, že udalosti Ježišovho ukrižovania a zmŕtvychvstania sa udiali práve v období po jarnej rovnodennosti a okolo času splnu.

Platia tu však nejaké špeciálne spresnenia. Na pripomenutie, jarná alebo jesenná **rovnodennosť** je deň v cykle obehu Zeme okolo Slnka, keď sú obidve pologule Zeme približne rovnako vzdialené od Slnka. Toto spôsobuje, že v každom mieste planéty deň a noc trvajú približne rovnako dlho - po 12 hodín. V dnešnom Gregoriánskom kalendári môže jarná rovnodennosť pripadnúť na 19., 20., alebo 21. marca. Tento deň sa určuje podľa toho, aký deň bude v Londýnskom časovom pásme, UTC-0 respektíve GTM, presne vtedy, keď budú obidva póly rovnako vzdialené od Slnka. **Cirkev však vždy používa 21. 3. miestneho času** na výpočet dátumu Veľkej noci, čomu sa hovorí cirkevná rovnodennosť.

Teraz ku **splnu**. Spln nastáva, keď je Mesiac na druhej strane Zeme od Slnka - teda svetlo zo Slnka, ktoré prechádza okolo Zeme, ale trafi Mesiac, nám ho celý osvetľuje. (*A ak sú dostatočne v jednej línii, tak Zem úplne blokuje osvetlenie nejakej časti Mesiaca a vtedy nastáva čiastočné alebo úplné zatmenie Mesiaca*). Táto situácia sa teda deje v rovnakom čase pre celú Zem, ale v rôznych zemepisných dĺžkach ju ľudia vidia skôr alebo neskôr, teda niekde môže byť spln v noc iného kalendárneho dňa ako niekde inde.

Preto si cirkev počíta k tomuto účelu svoj vlastný „kalendár“, ktorý je založený na 19-ročnom cykle 235 mesiacov, ktoré majú 29 alebo 30 dní. Tento kalendár sa pomerne presne zhoduje so skutočným obdobím devätnástich rokov a obežná doba mesiaca je okolo 29,3 dňa, teda tieto **vymyslené splny** sú približne priradené k splnom, ktoré sa skutočne dejú, s odchýlkou maximálne dvoch dní pre ľubovoľné miesto planéty. (Po devätnástich rokoch, keď sa už odchýlka trochu zväčší, sa počká niekoľko dní a cyklus sa znova naštartuje tak, aby bol čo najpresnejšie v zhode so skutočným dianím.) **Ešte treba spomenúť, že sa dá ukázať, že tento spln po nejakom čase pripadne na konkrétnu kombináciu dátumu a dňa v týždni. Pre stručnosť vzoráku túto časť vynecháme.**

Vyzerá to tak, že už máme všetky potrebné informácie, a môžeme teda vymýšľať riešenie. Určiť dátum naj skoršej Veľkej noci je jednoduché, keďže vieme, že „spln“ môže pripadnúť aj na 21.3., pričom tento deň môže byť sobota. Teda nasledujúci deň bude **22.3., Veľkonočná nedeľa**. Toto sa naposledy stalo na začiatku 19. stor. a najbližšie sa to stane v roku 2285.

Najneskoršia Veľká noc by mala byť, ak je „spln“ 20.3., teda deň pred cirkevnou rovnodennosťou, a k nasledujúcemu „splnu“ je to 30 dní. Tu by „spln“ vychádzal na 19.4., pričom tento deň by mohla byť nedeľa, aby ďalšia nedeľa, tá Veľkonočná, bola až o 7 dní. To by nám dalo Veľkonočnú Nedeľu na 26.4... **Avšak:** Keď cirkev v stredoveku zostavovala tento systém, ktorý sa používa doteraz, nechcela, aby Veľká noc mohla byť ešte neskôr ako v systéme, ktorý sa používal dovtedy. Tam bol práve najneskorší možný dátum 25.4. Aj tomuto posunu o

jeden deň sa však rozhodli zabrániť, a tak v prípade toho, že by „spln“ vychádzal na 19.4, ho premiestnili na 18.4. Teda analogicky k prvému výpočtu, ak bude „spln“ 18.4. v nedeľu, tak **Veľkonočná nedeľa bude 25.4.**

1.2 Elektrobús

vzorák **Lukáš G.**, opravoval **Lukáš G.**

Najskôr si uvedomme, čo znamená, že batéria má elektrickú kapacitu $C = 172 \text{ kWh}$. To znamená, že batéria je schopná v sebe udržať elektrickú energiu o veľkosti najviac $E_{\max} = 172 \text{ kWh}$. My však na začiatku máme batériu nabitú iba na 25%, a teda sa v batérii nachádza elektrická energia $E_{\text{začiatok}} = 25\% \cdot E_{\max} = 43 \text{ kWh}$. Ak chceme nabiť batériu na 100%, musíme jej dodať

$$\Delta E = E_{\max} - E_{\text{začiatok}} = 129 \text{ kWh}$$

elektrickej energie, čo po premene na jouly činí $\Delta E = 129 \text{ kWh} = 129\,000 \text{ Wh} = 464\,400\,000 \text{ Ws} = 464\,400\,000 \text{ J}$. Ako jej však túto energiu dodať? Napríklad tak, že ju napojíme na nabíjačku, a preto ňou bude prechádzať elektrický prúd, ktorý bude vykonávať elektrickú prácu, a dodá jej dostatočné množstvo energie. Teda prúd prechádzajúci nabíjačkou musí vykonať prácu $W = \Delta E = 464\,400\,000 \text{ J}$. Označme si spoločné napätie nabíjačiek $U = 400 \text{ V}$ a jednotlivé nabíjacie prúdy nabíjačiek $I_1 = 64 \text{ A}$ pre normálnu nabíjačku a $I_2 = 250 \text{ A}$ pre rýchlonabíjačku. Pre výpočet elektrickej práce vieme použiť vzorec $W = UIt$, z ktorého

$$t_1 = \frac{W}{UI_1},$$

$$t_2 = \frac{W}{UI_2},$$

kde t_1, t_2 sú postupne časy nabíjania batérie normálnou nabíjačkou a rýchlonabíjačkou. Keďže rýchlonabíjačka nabíja rýchlejšie ako normálna nabíjačka, tak ušetrený čas dostaneme ako

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_1 - t_2, \\ &= \frac{W}{UI_1} - \frac{W}{UI_2}, \\ &= \frac{W}{U} \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right), \\ &= \frac{464\,400\,000 \text{ J}}{400 \text{ V}} \left(\frac{1}{64 \text{ A}} - \frac{1}{250 \text{ A}} \right), \\ &= 1\,161\,000 \text{ J/V} (0,015\,625/\text{A} - 0,004/\text{A}), \\ &= 1\,161\,000 \text{ J/V} \cdot 0,011\,625/\text{A}, \\ &= 13\,496,625 \text{ J/(VA)} = 13\,496,625 \text{ s} \approx \boxed{3,75 \text{ h}}. \end{aligned}$$

Teda pri nabíjaní batérie elektrobúsu rýchlonabíjačkou ušetríme asi 3 hodiny a 45 minút.

1.3 Lepenie kobercov

vzorák **Nina**, opravovala **Nina**

Zamyslime sa najskôr, ako by sme z prvých 10 otočení pásky zistili dĺžku celej pásky. Najprv si všimnime, že dĺžka jedného otočenia sa rovná dĺžke jej obvodu, a teda πR , kde R je priemer pásky. Priemer pásky sa však pri jej odmotávaní znižuje, a to práve o jej hrúbku h za jedno odmotanie, teda jej obvod sa zmenší o $2\pi h$ za jedno odmotanie. Z toho už ľahko môžeme usúdiť, že dĺžky jednotlivých za sebou idúcich odtočení tvoria klesajúcu aritmetickú postupnosť s počiatočným členom a rovným počiatočnému obvodu pásky a rozdielom dvoch po sebe idúcich členov $d = -2\pi h$.

Dĺžka celej pásky je teda rovná súčtu aritmetického radu dĺžok jednotlivých odtočení

$$S = a \cdot n + d \cdot \frac{n(n-1)}{2},$$

kde n je počet navinutí pásky na kotúčiku.

Veľa z vás sa tento príklad pokúsilo vypočítať týmto spôsobom, ale málokomu sa podarilo si tento vzorec odvodiť. Hlavnou myšlienkou tohto vzorca je, že ak sčítavame n zasebou idúcich čísel, ktoré sa konštantne zväčšujú, resp. znižujú, tak súčet prvého a posledného je rovnaký ako druhého a predposledného, tretieho a predpredposledného a tak ďalej až po súčet dvoch v strede (ak sme mali párny počet čísel) alebo dvojnásobok prostredného (ak ich bol nepárny počet). Tieto súčty sa rovnajú dvojnásobku priemeru tohoto číselného radu, a teda na výpočet ich súčtu nám stačí zistiť, koľko ich je a aký je ich priemer (t. j. prostredná hodnota). Ich priemer, ako sme videli, je rovný súčtu prvého a posledného vydelenému 2. Potom súčet všetkých týchto čísel je ich počet vynásobený ich priemerom. V našom prípade prvý je dlhý a a posledný $a - (n-1)d$ a dokopy ich je n . Potom ich súčet je $\frac{a+a-(n-1)d}{2} \cdot n = a \cdot n + d \cdot \frac{n(n-1)}{2}$

Zoberieme si teda pásku podľa nášho výberu, z jej boku si zaznačíme jej začiatok. Potom ju začneme odvíjať a priliepať na nejaký dlhý rovný povrch (dvere, stôl, zárubne, podlaha) - páska sa nám bude ľahšie merať, ak sa nebude hýbať a bude rovno prilepená. Zároveň si pri každom odvinutí pásky pomocou už spomínanej rýsky na ňu zaznačíme body, ktoré sa prekrývali s jej začiatkom, čiže budeme mať na nej vyznačené dĺžky prvých 10 odvinutí.

Keď máme pásku 10-krát odvinutú, zmeriame si dĺžku odvinutej časti l_1 a dĺžku prvých 5 odvinutí l_2 . Tu vieme, že $l_1 = 10a + 45d$ a $l_2 = 5a + 10d$. V našom prípade sa $l_1 = 1650$ mm a $l_2 = 828$ mm. Z toho vypočítame $a = 166,08$ mm a $d = -0,24$ mm. Pomocou nich vieme vypočítať priemer pôvodnej pásky R_1 a aktuálny priemer pásky R_2 , $R_1 = \frac{a}{\pi} = 52,86$ mm a $R_2 = \frac{a+10d}{\pi} = 52,1$ mm. (Vidíme, že takto získaný priemer je o dosť presnejší, než keby sme ho priamo merali. Vtedy by sme získali $R_1 = 53$ mm a $R_2 = 52$ mm.) Potom hrúbka h odvinutej pásky je $\frac{R_1-R_2}{20} = \frac{-10d}{20\pi} = \frac{-d}{2\pi} = 0,038$ mm.

Aby sme zistili, koľkokrát je páska navinutá na kotúčiku, zmeriame si aj jeho polomer $r = 34$ mm, čím získame, že páska je na kotúčiku navinutá približne $n = \frac{R_1-r}{2h} = 248,16$ -krát. Potom

$$S = a \cdot n + d \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 33\,853 \text{ mm.}$$

Pre porovnanie: V papiernictve nám tvrdili, že páska je dlhá 33 m = 33 000 mm a ručným odmeraním pásky sme zistili, že je dlhá 31 804 mm. Chyba vznikla pravdepodobne pri meraní priemeru kotúčika a dĺžok l_1 a l_2 .

Iné riešenie by bolo, ak by sme si uvedomili, že so znižovaním priemeru pásky sa nám znižuje aj obsah bočnej steny pásky, a to presne o odmotanú dĺžku pásky vynásobenú jej hrúbkou h . Ak si teda zrátame obsah medzikružia, ktoré tvorilo prvých desať obtočení pásky, a vydělíme ho dĺžkou odmotanej pásky, získame hrúb-

ku pásky. Ak potom touto hrúbkou vydelíme obsah medzikružia, ktoré páska na začiatku zapĺňala, získame celkovú dĺžku pásky.

1.4 Mariankina zbierka

vzorák Krtko, opravoval Krtko

Aby sme mohli odpovedať na Mariankine otázky, potrebujeme vedieť, ako fungujú kladky a hydraulické piesty.

Pevná kladka

Pevná kladka iba mení smer pôsobenia sily. Nemení jej veľkosť.

Voľná kladka

Zato voľná kladka rozkladá silu, ktorou na ňu pôsobí závažie, na obe strany špagátu, na ktorom visí.

Na druhú stranu dráha je dvakrát dlhšia - ak chceme zdvihnúť závažie o dráhu l , musíme potiahnuť až $2l$ lana.

Hydraulické piesty

Máme dva spojené piesty naplnené nestlačiteľnou kvapalinou. To znamená, že objem kvapaliny sa nemení. Ak teda vytlačíme objem V posunutím piestu o dráhu h_1 , do druhého piestu musí pribudnúť taktiež objem V . Ako však zistíme, o koľko sa posunul druhý piest? No to je vcelku jednoduché. Objem vody vytlačenej piestom predsa vyrátame ako:

$$V = Sh.$$

Ak teda poznáme obsah oboch podstáv S_1 a S_2 a jednu dráhu h_1 , tak potom

$$h_2 = h_1 \frac{S_1}{S_2}.$$

A teraz k sile. Vieme, že tlak v pieste sa rovná

$$p = \frac{F}{S}.$$

Samozrejme, že stále máme oba piesty naplnené rovnakou nestlačiteľnou kvapalinou, čiže tlak musí byť v oboch piestoch rovnaký. Ak teda poznáme obsah oboch podstáv S_1 a S_2 a jednu silu F_1 , tak potom

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}.$$

Riešenie sústavy

Teraz, keď už vieme, ako a čo robia jednotlivé časti našej sústavy, tak môžeme odpovedať na jednotlivé otázky.

Hmotnosť závažia

Lano držíme silou 1 N. Prvá kladka je pevná, čiže z hľadiska sily nerobí nič.

Druhá je voľná, čiže ako sme si povedali, voľná kladka rozkladá silu na obe strany špagátu. Ak teda na jednej strane špagátu pôsobí sila 1 N, tak aj na druhej strane špagátu musí pôsobiť sila 1 N. To znamená, že výsledná sila, ktorou kladka pôsobí na piest, je 2 N.

Pre piest sme si povedali, že výsledná sila je $F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}$, z čoho po dosadení dostaneme

$$F_2 = 2 \text{ N} \frac{4S}{S},$$

$$F_2 = 8 \text{ N}.$$

Ďalej máme ešte jednu pevnú kladku a ďalšiu voľnú kladku. Tá pevná opäť nespraví nič. No tá voľná zasa rozloží silu, ktorou drží závažie, na obe strany. Ak teda jedna z tých strán pôsobí silou 8 N, tak závažie musí pôsobiť silou 16 N.

Ak vieme, že

$$F = mg,$$

tak potom

$$m = \frac{F}{g},$$

a teda hmotnosť závažia je

$$m = \frac{16 \text{ N}}{9,81 \text{ m/s}^2},$$

$$m = 1,63 \text{ kg}.$$

O koľko potiahnuť lano?

Vieme, že chceme posunúť závažie o 1 cm. Tentoraz poďme od závažia po začiatok kladkostroja. Najprv máme voľnú kladku, ktorú keď chceme zdvihnúť o 1 cm, musíme potiahnuť 2 cm. Ďalej máme pevnú kladku, ktorá žiadnym spôsobom neovplyvní, o koľko musíme potiahnuť lano. Za kladkou nasleduje piest. Ako sme si povedali,

$$h_2 = h_1 \frac{S_1}{S_2},$$

kde za h_1 dosadíme 2 cm, S_1 je plocha pri závaží, čiže $4S$ a S_2 je S . Teda lano prichytené na druhý koniec piestu treba potiahnuť o

$$h_2 = 2 \text{ cm} \frac{4S}{S},$$

$$h_2 = 8 \text{ cm}.$$

Ešte nám zostáva jedna voľná a jedna pevná kladka. Voľná opäť dráhu zdvojnásobí, teda aspoň v tomto smere, keďže chceme voľnú kladku zdvihnúť o 8 cm a na to musíme potiahnuť 16 cm lana. Pevná nespraví nič, z čoho vyplýva, že treba potiahnuť 16 cm lana.

Kolko práce?

Otázka sa pýta: Akú prácu Marianka vykoná, ak zdvihne závažie s hmotnosťou 1,63 kg o 1 cm? Túto otázku však môžeme preformulovať na: Akú prácu Marianka vykoná, ak zdvihne závažie silou 1 N o 16 cm?

Toto tvrdenie môže vyvolať otázku prečo?

No odpoveď je pomerne jednoduchá, náš kladkostroj žiadnu prácu nevykonáva, iba mení jej formu. Takže to, či zdvihneme závažie s hmotnosťou 1,63 kg o 1 cm, je úplne to isté, ako keby sme využili kladkostroj, a teda potiahli 16 cm lana, silou 1 N, čím by sme závažie vo výsledku tiež zdvihli o 1 cm.

Keďže prácu vyrátame ako

$$W = F \cdot s,$$

tak výsledná práca je

$$W = 1 \text{ N} \cdot 16 \text{ cm},$$

$$W = 1 \text{ N} \cdot 0,16 \text{ m},$$

$$W = 0,16 \text{ J}.$$

A teda rovnaký výsledok dostaneme, aj keď dosadíme hodnoty, ako keby sme priamo zdvíhali závažie

$$W = 16 \text{ N} \cdot 1 \text{ cm},$$

$$W = 16 \text{ N} \cdot 0,01 \text{ m},$$

$$W = 0,16 \text{ J}.$$

1.5 Ladová krajina

vzorák Marek a Lukáš O., opravoval Marek a Lukáš O.

Ak chceme chudáka Adama kamkoľvek presunúť, musíme sa zamyslieť, ako sa vlastne hýbeme. Za všetky možnosti presunu vďačíme tretiemu Newtonovmu zákonu, ktorý nám v skratke hovorí, že každá akcia má opačnú reakciu. Chôdza napríklad prebieha takým spôsobom, že pôsobíme silou na podložku proti smeru, ktorým chceme ísť. To, že sme schopní takouto silou pôsobiť, je spôsobné trením, teda malými nedokonalosťami povrchu, ktoré nám umožňujú takúto silu vyvolať. Naša akcia je pohyb nôh dozadu a reakciou je pohyb vpred. Teraz, keď si odmyslíme tie nedokonalosti povrchu, zistíme, že strácame trenie a teda aj pohyb vpred. Jediný smer, ktorým sa vieme pohybovať, je teda nahor, pretože sme sa nevzdali normálovej sily. Tá pôsobí od podložky smerom nahor, aby vyrovnala gravitačnú silu. Bez nej by sme sa prepadli pod zem. To nám je však na nič, ak sa chceme niekam presunúť v inom ako vertikálnom smere.

Keď sa však nemôžeme odrážať od zeme, od čoho teda? Nuž, to niečo je všade okolo nás: naša drahá atmosféra a vzduch, ktorý ju tvorí. Podobne ako lietadlo sa "odráža" od vzduchu smerom vpred, aj my vieme pre Adama navrhnúť metódu, ktorá bude využívať vzduch na to, aby nás pohla dopredu.

Existuje mnoho metód, ako sa v takomto klzkom svete pohybovať. Jediné, čo nás obmedzuje, sú naše zdroje a naša kreativita. Všimnime si, že podložka je dokonale tvrdá - teda klasické metódy na presun po hladkom povrchu ako korčule nebudú fungovať, pretože korčule si tvoria svoje trenie tak, že vyrežú do ľadu ryhu, o ktorú sa potom môžeme zaprieť. Vzduch však vieme využiť, pretože je to tekutina tak ako voda a vo vode sa vieme pohybovať aj bez trenia - len za pomoci hydrodynamického odporu. Adamovi teda navrhne využiť atmosféru ako svoje pohonné médium, a to rovno niekoľkými rôznymi spôsobmi. Všimnite si, že vlastne všetky sú založené na rovnakom princípe.

Môžeme zobrať kus kartónu alebo akýkoľvek kus rovnej plochy (napríklad notebook) a využijeme ho ako plutvu. Ak nemá Adam k dispozícii žiadne pomôcky, ostáva mu už len obyčajné fúkanie. Postaví sa chrbtom k smeru, kadiaľ chce ísť a začne jednoducho fúkať. Uvedomme si, že aj dýchanie vyvoláva akciu a reakciu - akcia je to, že plyn vydychujeme a reakcia, že sa pohneme. O tom, že vzduch pôsobí nejakou silou, sa vieme presvedčiť hocijako, napríklad sfúknutím sviečky alebo odfúknutím semiačok z púpavy. Keďže nám zem neposkytuje žiadne trenie a ani vzduch, je toto taktiež riešením. To vieme preto, lebo aerodynamická odporová sila závisí od v^2 a pre malé rýchlosti je odpor zanedbateľný.

Už si treba uvedomiť len správnu techniku dýchania, a to preto, že keby sme vdychovali rovnako ako vydychovali, tak máme rovnako veľké, ale protichodné akcie a reakcie, ktoré sa nám vyrušia. Či je tomu tak? Nuž

nie, lebo si stačí uvedomiť, že keď dýchame rovnakým smerom, najprv zrýchlime a potom vydýchnutím zastavíme, alebo naopak, v najhoršom prípade budeme však oscilovať okolo jedného miesta, ale to sa dá ošetriť tým, že zmeníme množstvo vzduchu, ktoré vydýchneme alebo vdýchneme. Toto je ale neefektívne, lebo sa stále brzdíme. Skúsme vymyslieť niečo lepšie, napríklad začať dýchať rôznym smerom ako vydychovať. Treba teda otáčať hlavou. To vieme spraviť, lebo svaly nie sú obmedzené zamrznutým svetom.

Teraz zopár háčikov, na ktoré si treba dávať pozor. Napríklad pri otočení hlavou doľava sa telo otočí doprava a naopak, znovu vyplývajúce z akcie a reakcie. Teda trošku zmeníme smer, ale aj v tomto prípade sa vieme odfúkať až do cieľa. V prípade, že by sme chceli odbočiť, navrhujem pozrieť riešenie úlohy: <https://fks.sk/ulohy/zadania/1276>. Hlavne teda priložené video. V neposlednom rade si treba dať pozor na polohu tela, pretože ak budeme stáť rovno, tak moment sily, ktorý vyvoláme vydýchnutím, spôsobí, že by sa telo rado otáčalo okolo ťažiska, a následne, keďže nemáme u nôh trenie, ktoré by nám bránilo v spadnutí, by sme spadli na zem. Je to podobné, ako keď tlačíte na jeden koniec ceruzky, tá sa začne otáčať. Na odstránenie tohto problému by malo stačiť vhodne sa predkloniť alebo zakloniť podľa smeru, ktorým chceme ísť, aby tiažová sila kompenzovala naše dýchanie. Prípadne si môžeme aj ľahnúť na zem, keby si niekto neveril, že sa zvládne udržať.

Teraz trocha inžinierske riešenie pre Adama, ktorý má kopu času na prípravu a je inšpirovaný nasledujúcim videom: <https://youtu.be/ePtEekKvkq0>. Keď na chrbát pripevníme Adamovi motor s vrtuľami, máme niečo ako vrtuľník, iba horizontálne nasmerovaný. Okrem toho, že je tento spôsob zábavný a efektívny, môžeme si byť istí, že Adam dorazí do práce včas a tiež vo veľkom štýle.