Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Deravý nôž

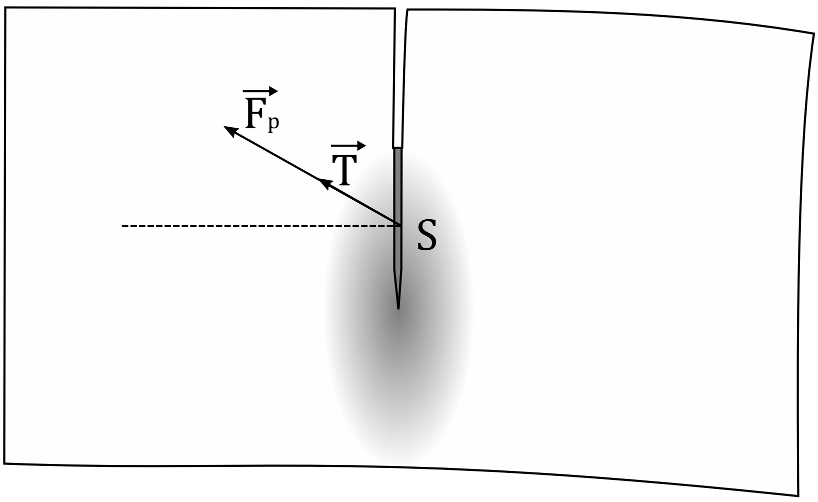
vzorák **Jaro**, opravovala **Marianka**

Poďme sa teda zamyslieť, prečo Adamov výmysel bol taký úspešný. Keď sa pozrieme na rôzne typy nožov s dierami, môžeme si všimnúť, že diery majú rôzne veľkosti a väčšinou sú na jednej úsečke. Niektorí ľudia si môžu myslieť, že diery v nožoch na syr sú len pre estetickosť, aby vyzerali lepšie. Tento faktor nie je nepravdivý, ale z fyzikálneho hľadiska majú nože s dierami aj iné výhody ako výzor.

Ako prvý nástrel by sme sa mohli domnievať, že ak má nôž diery, tak naň pôsobí menšia trecia sila. Ale je to naozaj pravda? Veď v škole nás učili, že veľkosť trecej sily nezávisí od stýčnej plochy. Treciu silu vypočítame jednoducho ako súčin normálovej sily a koeficientu trenia $F_t = f \cdot F_n$. Tadiaľto teda zdanlivo cesta nevedie.

Kľúč k vyriešeniu úlohy spočíva v tom, že keď materiál nejakým spôsobom namáhame, vyvolávame v ňom stav napätia. Je to veľmi podobné napríklad tomu, keď naťahujeme gumičku, stláčame penovú loptičku či deformujeme kus plastelíny – aj v nich vzniká napätie. Akurát pri krájaní je to napätie úplne iné. Jeho podstata je však jednoduchá. Dotýkajúce sa častice či už jednej látky (gumička), alebo medzi dvomi rôznymi (syr a nôž) na seba silovo pôsobia, čím spôsobujú makroskopickú kontaktnú/plošnú silu, no a tá je tým väčšia, čím väčšia je stýčná plocha, pretože vtedy viac častíc prichádza do kontaktu. Dôležité je, že ak dve rovnaké telesá podstupujú rovnakú deformáciu, tak stav napätia je rovnaký.

Uvažujme dva rovnaké kusy syra a dva rôzne nože – obyčajný a špeciálny s dierami – a urobme nimi dva identické rezy. Keď sa teraz pozrieme na syry, tak nevieme povedať, ktorý nôž urobil ktorý rez. Deformácia je v prvom priblížení rovnaká, čo znamená, že oba nože pri rezaní spôsobili rovnaký stav napätia. A toto je to dôležité – v oboch prípadoch je rovnaké napätie, no povrchová sila je rôzna!



Obrázok 1: *Nôž režúci syr. Veľkosť napätia v syre je reprezentovaná odtieňom sivej. Vidíme, že najväčšie napätie je v okolí hrotu noža a postupne klesá. Vektor napätia je znázornený na pravej strane noža a smeruje doľava a nahor. Rovnaký smer má teda aj povrchová sila od syra na nôž. To znamená, že syr zboku na nôž tlačí a zároveň pôsobí nahor proti pohybu. Rovnako však syr pôsobí aj na druhej strane noža, preto sa horizontálne zložky povrchovej sily vyrušia a zostane len sila pôsobiaca nahor.*

Povedzme si, ako súvisí povrchová sila s napätím. Keď uvažujeme nejakú plochu S, tak materiál na jednej strane plochy pôsobí na materiál na druhej strane plochy silou $\vec{F_p} = \vec{T} \cdot S$, kde $\vec{T}$ je vektor napätia na ploche. Všimnime si, že vektor napätia sa správa rovnako ako tlak p. Jediný rozdiel je, že tlak je skalárna veličina[1], zatiaľ čo vektor napätia je vektorová veličina[2]. Vektor napätia, a tým pádom aj povrchová sila, nemusia byť nutne kolmé na plochu S. To je dôvodom, prečo musíme hovoriť o napätí a nie o tlaku – o tlaku môžeme hovoriť len v tekutinách, kde tlaková sila je vždy kolmá na plochu.[3]

V tomto momente máme vyhrané. Vieme, že v dôsledku rezania vzniká v syre i v noži stav napätia, ktorý je v mieste kontaktu noža so syrom popísaný vektorom napätia $\vec{T}$. Tento je rovnaký v prípade použitia obyčajného či špeciálneho noža na syr. Lenže sila, ktorou pôsobí syr na nôž, a ktorú musíme pri rezaní prekonať, je $\vec{F_p} = \vec{T} \cdot S$, [4] kde S je bočná plocha noža. Presnejšie musíme pôsobiť silou veľkosti $F = 2F_p \sin\alpha = 2TS \sin\alpha$, lebo nôž má dva povrchy a my musíme prekonať len zložku sily v smere rezu.[5] No ale styčná plocha S je v prípade noža s dierami menšia, preto sa ním krája ľahšie.

Okrem toho nezanedbateľnú úlohu zohráva aj fakt, že na nôž s dierami sa syr až tak nelepí, čo opäť súvisí s menšou plochou a napätím na styčnej ploche. Obyčajne chceme odkrojiť tenké plátky syra, no a ak sa syr na nôž lepí, tak sa syr ohýba a láme, čo je nežiaduce. Preto je aj z tohto pohľadu výhodnejšie používať nôž s dierami.

Ešte jednou, takou menej podstatnou výhodou je to, že sa využije menej materiálu. Takže nôž je ľahší, čo znamená, že sa s ním jednoduchšie manipuluje.

Nezabudnime ešte na rozdvojený koniec noža, ktorý slúži na napichávanie syra.

2.2 Z trochu iného súdka

vzorák **Krtko** a **Marianka**, opravovali **Marianka** a **Krtko**

Keď ste si prvýkrát prečítali túto úlohu, pravdepodobne ste ostali v miernom šoku, čo za jednotky sú v nej použité. Prvým dôležitým krokom bolo zistiť, či jednotky obsahujú predpony. Naše SI jednotky obsahujú predpony ako piko (10^{-12}), atto (10^{-18}) alebo mikro (10^{-6}), avšak žiadne sirio medzi nimi nenájdeme.

Premeny jednotiek

Následne, keď už vieme, aké jednotky máme hľadať na internete, môžeme sa do toho pustiť. Piktún je časť Mayského kalendára, ktorá tvorila 2 880 000 kin[6], čo keď si prerátame na sekundy, dostaneme 248 832 000 000 s.

Pes quadratus by podľa zadania mala byť jednotka plochy. Po chvíli googlenia sa dá dostať k informácii, že je to preklad slovného spojenia stopa štvorcová do latinčiny, čo je teda 0,087 44 m^2.

Ďalej máme v zadaní siriometre, ktorých význam vieme nájsť napríklad na Wikipédii, kde taktiež uvádzajú, že je to 149 597 870 000 000 000 m.

[1] má iba veľkosť

[2] má veľkosť aj smer

[3] Termín tlak sa zvyčajne používa aj v prípade pevných látok, keď kontaktná sila F_p má smer kolmý na plochu a ide o rozhranie medzi dvomi telesami. Vtedy sa ním nahrádza termín normálové napätie.

[4] Ak by sme chceli byť úplne presní, tak $\vec{T}$ nie je rovnaký pozdĺž celého noža. Z toho dôvodu by sme mali rozdeliť plochu S na malé plôšky, na ktorých je $\vec{T}$ rovnaký, a príspevky od všetkých plôšok sčítať. Alternatívne si pod $\vec{T}$ môžeme predstaviť jeho priemernú hodnotu na ploche S.

[5] Alternatívne sa na to môžeme pozerať aj tak, že zoberieme normálovú zložku sily $F_n = F_p \cos\alpha$, a potom vypočítame treciu silu $F_t = fF_p \cos\alpha$. Potom dostaneme $F = 2fTS \cos\alpha$. Porovnaním oboch výsledkov zisťujeme $f = \tan\alpha$. Je to len rôzny pohľad na ten istý jav.

[6] dni v Mayskom kalendári

Potom musíme ešte vyhľadať, koľko sekúnd je jeden sol. Zo zadania je totiž zrejmé[7], že sa jedná o jednotku času. No a po troške pátrania zistíme, že sa jedná o jeden deň na povrchu planéty Mars. Teda jeden sol je 88 775,244 s.

No a nakoniec si vyhľadáme rakúske kvintlíky. Po možno trošku dlhšej chvíli hľadania zistíme, že libra[8] sa skladá zo 128 kvintlíkov alebo kventlíkov a teda, že jeden kvintlík z rakúskej alebo viedenskej libry je 0,004 375 kg.

Akonáhle sme si vyzistili, ako sa majú tieto exotické jednotky premeniť na naše SI jednotky, tak sa môžeme vrhnúť na vyrátanie úlohy. Existujú dva spôsoby, ktorými sa táto úloha dala počítať.

Prvý spôsob

Pri prvom spôsobe si povieme, že pohár má rovnakú podstavu ako prierez kohútika. Ďalej chceme zistiť objem tekutiny, ktorá do pohára vtečie za určitý čas. Z tejto úvahy nám príde vcelku intuitívne, že keď kvapalina priteká rýchlosťou napríklad meter za sekundu, tak po jednej sekunde budeme mať hladinu vo výške jedného metra. Teda objem vieme vypočítať ako obsah postavy vynásobený rýchlosťou, akou vyteká kvapalina z kohútika a vydelením časom, za ktorý kvapalina vytiekla. Takáto rovnica vyzerá nasledovne:

$$V = Svt.$$

Marek by však rád zistil hustotu danej kvapaliny a nie jej objem. Preto si Marek nakoniec kvapalinu odvážil. Keďže vieme, že hustotu vieme vypočítať ako $\rho = \frac{m}{V}$, tak výsledná rovnica bude

$$\rho = \frac{m}{Svt}.$$

Druhý spôsob

Druhý spôsob riešenia zahŕňa rovnicu kontinuity, ktorá je použitá v odvodení Bernoulliho rovnice. Rovnica kontinuity vyzerá ako $\rho_1 \cdot S_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot v_2$, pričom rátame s tým, že prúdenie kvapaliny je ustálené, takže v kohútiku sa nemôže nahromadiť tekutina. Z tohto celého nám vyplýva, že môžeme použiť vzorec $m = \rho \cdot S \cdot v \cdot t$. Z takéhoto vzťahu vie Marek veľmi jednoducho zistiť hustotu kvapaliny. Stačí si ju iba vyjadriť a dosadiť naše hodnoty do vzorca

$$\rho = \frac{m}{Svt}.$$

Je to presne tá istá rovnica ako v prvom spôsobe.

Mohol sa Marek Kvapaliny napiť?

Odpoveď znie, nie!

Po dosadení všetkých hodnôt a konverzii všetkých jednotiek aj s SI predponami dostaneme

$$\rho = \frac{m}{Svt},$$

$$\rho = \frac{370 \cdot 0{,}004\,375\ \mathrm{kg}}{0{,}001 \cdot 0{,}087\,44\ \mathrm{m}^2 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-18} \cdot 149\,597\,870\,000\,000\,000\ \mathrm{m}}{10^{-6} \cdot 88\,775{,}244\ \mathrm{s}} \cdot 12 \cdot 10^{-12} \cdot 248\,832\,000\,000\ \mathrm{s}},$$

$$\rho = \frac{1{,}618\,75\ \mathrm{kg}}{0{,}000\,087\,44\ \mathrm{m}^2 \cdot \frac{0{,}299\,195\,74\ \mathrm{m}}{0{,}088\,775\,244\ \mathrm{s}} \cdot 2{,}985\,984\ \mathrm{s}},$$

[7] v zadaní je rýchlosť v attosiriometroch za mikrosol a my vieme, že siriometre sú jednotka dĺžky
[8] jednotka hmotnosti

$$\rho = \frac{1{,}618\,75\ \mathrm{kg}}{0{,}000\,087\,44\ \mathrm{m}^2 \cdot 3{,}370\,260\,970\,502\,091\,6\ \mathrm{m/s} \cdot 2{,}985\,984\ \mathrm{s}},$$

$$\rho = \frac{1{,}618\,75\ \mathrm{kg}}{0{,}000\,879\,956\,403\,982\,550\,9\ \mathrm{m}^3},$$

$$\rho = 1839{,}579\,770\,854\,306\ \mathrm{kg/m}^3.$$

Ak sa pozrieme do rôznych chemických tabuliek, zistíme, že k nami vyrátanej hustote má najbližšie kyselina sírová, ktorej by sa Marek určite napiť nemal.

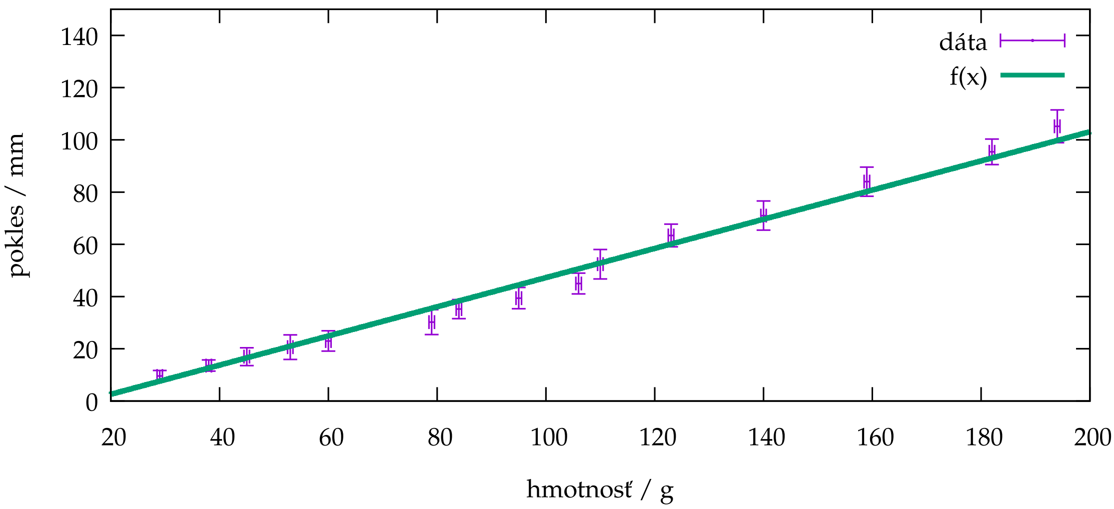
2.3 Drevený žeriav

vzorák **Krtko**, opravoval **Krtko**

Najprv sa zamyslime, prečo by sa špajdľa vôbec mala ohnúť. No, pôsobí na ňu gravitačná sila a špajdľa nie je dokonale pevná. Do väčšej miery sa tým zapodievať nemusíme.

Nezabudnime však, že treba zmerať, o koľko špajdľa (presnejšie jej koniec) poklesne. Pre jednoduchosť merania si špajdľu môžme pripevniť ku kraju stola tak, aby sme za ňu mohli pripevniť pravítko alebo meter. Je dobré poriadne zaťažiť pevný koniec špajdle. Môžeme naň položiť kôpku kníh alebo čokoľvek iné, čo má nejakú nezanedbateľnú hmotnosť. A teraz stačí merať, o koľko poklesne špajdľa pri jednotlivých závažiach. Ako závažie môžeme použiť pohár pripevnený šnúrkou na koniec špajdle, do ktorého budeme postupne prikladať rôzne závažia - napríklad perá alebo čokoľvek iné, čo máme po ruke. Dôležité je merať pokles konca špajdle a nie nejakého náhodného bodu na špajdli. Keď už odmeriame zopár hodnôt pre jednu špajdľu[9], môžeme meranie zopakovať na ďalšej špajdli. Takto získame viac hodnôt pre konkrétne hmotnosti závažia[10].

Aby sme boli schopní vytvoriť graf, musíme tieto hodnoty spriemerovať a vyrátať odchýlku pre každú hmotnosť závažia.



Obrázok 2: *Závislosť poklesu konca špajdle od hmotnosti závažia*

[9] v mojom prípade 15
[10] ja som meral 5 rôznych špajdlí

Z grafu vidíme, že nie všetky hmotnosti nám vyšli rovnako presne. Teraz prichádza čas zamyslieť sa nad tým, prečo je to tak. Hádam je jasné, že nejakú odchýlku musíme mať iba z dôvodu, že špajdle nie sú identické. No a ďalším dôvodom je, že pri ťažších závažiach je koniec špajdle výrazne nižšie, ale aj bližšie k začiatku, čo spôsobuje, že koniec špajdle nám už nezasahuje do oblasti, kam sme si pôvodne pripevnili meter, a teda ho musíme presunúť. Toto presunutie však môže spôsobiť drobné posunutie metra a pár milimetrov hore či dole.

2.4 Neskoro na preteky

vzorák **Marcel**, opravoval **Marcel**

To, čo vieme, je, že v momente, keď sa dobehnú, tak sa ich dráhy budú rovnať. Vieme teda, že:

$$s_{\text{Jara pri dobehnutí}} = s_{\text{Marcela pri dobehnutí}}.$$

Z toho teda vieme, že keďže $s = vt$, tak ak si označíme veci, čo sa týkajú Marcela s indexom M, veci, čo sa týkajú Jara s indexom J, čas, za ktorý sa dobehnú ako t, a rozdiel medzi nimi (tých 5 minút) ako T, potom:

$$v_M t = v_J(t - T).$$

Obe rýchlosti, aj Jarovu, aj Marcelovu, vieme vyjadriť z ich celkovej dráhy ako:

$$v_M = \frac{s}{t_M}, \qquad v_J = \frac{s}{t_J}.$$

Keď si to dosadíme, dostaneme:

$$\frac{s}{t_M}t = \frac{s}{t_J}(t - T).$$

Dráhu s môžeme vykrátiť, a teda

$$\frac{t}{t_M} = \frac{t - T}{t_J},$$

čím dostávame rovnicu, v ktorej už všetko okrem t poznáme, a teda si ho vyjadríme.

$$\frac{t}{t_M} = \frac{t}{t_J} - \frac{T}{t_J},$$

$$\frac{t}{t_J} - \frac{t}{t_M} = \frac{T}{t_J},$$

$$t\frac{t_M - t_J}{t_M t_J} = \frac{T}{t_J},$$

$$t = \frac{T t_M t_J}{t_J(t_M - t_J)}.$$

Z pravej strany vykrátime t_J a dostaneme:

$$t = \frac{Tt_M}{t_M - t_J}.$$

Po dosadení dostávame, že:

$$t = 12\ \mathrm{min}.$$

Ibaže nás zaujíma časť dráhy, v ktorej sa dobehnú. Vieme teda, že sa dobehnú po 12 min od toho, ako Marcel začal bežať. Marcelovi celá trasa trvá 60 minút, a teda po 12 minútach bude v $\frac{12}{60}$ dráhy, čo je po vykrátení $\frac{1}{5}$ celkovej dráhy.

2.5 Prší, prší, len sa leje

vzorák **Lukáš G.**, opravoval **Lukáš G.**

Už zadanie nám samo o sebe našepkáva, že pri riešení úlohy chceme využiť odporové sily. Poďme si teda o nich niečo povedať. Kvapka padá smerom dole rýchlosťou v. Pri tom ale rozráža vrstvy vzduchu, ktoré ju teda turbulentne obtekajú, a teda sa tesne nad kvapkou vytvárajú víry. To spôsobuje, že proti smeru pohybu kvapky nám vzniká odporová sila, ktorej veľkosť vieme vypočítať ako

$$F_o = \frac{1}{2} C S \rho_{\text{prostredie}} v^2,$$

kde C je tzv. *koeficient aerodynamického odporu* (závisí od tvaru telesa a zisťuje sa experimentálne), S je obsah prierezu telesa, $\rho_{\text{prostredie}}$ je hustota prostredia, v ktorom sa teleso nachádza (v našom prípade je to vzduch) a v je rýchlosť telesa vzhľadom na prostredie.

Všimnime si, že gravitačná sila F_G a odporová sila F_o pôsobia v navzájom opačných smeroch, a preto bude zaujímavé porovnať ich veľkosti.

Väčšia gravitačná sila

Čo sa s kvapkou deje, ak na ňu pôsobí väčšia gravitačná sila ako odporová? Keďže tieto sily pôsobia na kvapku v navzájom opačných smeroch, tak celková sila pôsobiaca na kvapku je $F = F_G - F_o$ v smere pohybu kvapky. Čo to ale pre kvapku znamená? Z druhého Newtonovho zákona vieme, že ak na teleso pôsobíme v smere jeho pohybu, tak sa jeho rýchlosť zvyšuje. No ale tým, že sa zvyšuje rýchlosť kvapky, tak sa zvyšuje aj odporová sila, ktorá na ňu pôsobí. Môžeme si uvedomiť, že rýchlosť sa nám bude zvyšovať dovtedy, kým sa sily nevyrovnajú.

Väčšia odporová sila

Teraz si uvedomme, čo sa s kvapkou deje, ak na ňu pôsobí väčšia odporová sila ako gravitačná. Celková sila pôsobiaca na kvapku je $F = F_o - F_G$ proti smeru pohybu, a teda z druhého Newtonovho zákona kvapka spomaľuje. Znižuje sa teda aj odporová sila, ktorá na ňu pôsobí, a teda aj výslednica síl. Zase si môžeme uvedomiť, že rýchlosť sa bude znižovať, až kým sa sily nevyrovnajú.

Sily sú v rovnováhe

Máme tu ten posledný prípad, a to $F_o = F_G$. Keďže tieto sily pôsobia v navzájom opačných smeroch, tak sa navzájom vynulujú, a teda celková sila pôsobiaca na kvapku je nulová. Tu ale z prvého Newtonovho zákona vieme, že kvapka je teda v rovnomernom pohybe, a jej rýchlosť sa teda nemení. Z toho ďalej vieme, že ani odporová sila pôsobiaca na kvapku sa nemení, a teda sú už sily pôsobiace na kvapku stabilné. Rýchlosť, pri ktorej sa kvapka dostane do tohoto štádia, sa nazýva *medzná* alebo aj *terminálna rýchlosť*. No, a keďže kvapky padajú z výšky niekoľkých kilometrov, tak v čase, keď ich zazrela Terka, už určite dosiahli medznú rýchlosť.

Rýchlosť kvapky vzhľadom na jej veľkosť

Keďže už vieme niečo o silách pôsobiacich na kvapku, môžeme prejsť k výpočtu. Kvapka je tvaru gule a pre guľu platí, že čím má väčší polomer r, tým má väčší aj objem V, a preto vyjadríme rýchlosť kvapky vzhľadom na jej polomer. Keďže kvapka dosiahla medznú rýchlosť, tak musí platiť:

$$
\begin{aligned}
F_o &= F_G,\\
\frac{1}{2}CS\rho_{\text{vzduch}}v^2 &= mg,\\
\frac{1}{2}C\pi r^2\rho_{\text{vzduch}}v^2 &= V\rho_{\text{voda}}g,\\
\frac{1}{2}C\pi r^2\rho_{\text{vzduch}}v^2 &= \frac{4}{3}\pi r^3\rho_{\text{voda}}g,\\
\frac{1}{2}C\rho_{\text{vzduch}}v^2 &= \frac{4}{3}r\rho_{\text{voda}}g,\\
v^2 &= \frac{8}{3}\cdot\frac{r\rho_{\text{voda}}g}{C\rho_{\text{vzduch}}},\\
v &= \sqrt{\frac{8}{3}\cdot\frac{r\rho_{\text{voda}}g}{C\rho_{\text{vzduch}}}},\\
v &= \boxed{2\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{r\rho_{\text{voda}}g}{C\rho_{\text{vzduch}}}}}.
\end{aligned}
$$

Ako už vieme, kvapka je tvaru gule, a preto $C \approx 0{,}47$. Hustota vody je $\rho_{\text{voda}} = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$, hustota vzduchu $\rho_{\text{vzduch}} = 1{,}3\ \mathrm{kg/m^3}$ a gravitačné zrýchlenie $g \approx 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. Po dosadení týchto hodnôt dostávame, že

$$v \approx 204{,}57\sqrt{r},$$

kde po dosadení polomeru r kvapky v metroch dostaneme jej rýchlosť v v metroch za sekundu. Vidíme teda, že čím väčší je polomer kvapky, tým väčšia je jej rýchlosť. Terke teda spokojne môžeme povedať, že veľké kvapčiská padajú rýchlejšie ako množstvo malých kvapôčok.