

Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Kuchynská kompresia

vzorák M&M, opravoval Lukáš G.

Ako ste iste pochopili, zadanie sa pýta, či objem výslednej zmesi bude väčší, menší alebo rovnaký ako súčet objemov múky a cukru. Objem zmesi si môžeme určiť ako minimálny objem nádoby, do ktorej sa naša zmes zmestí. Medzi jednotlivými zrníčkami múky a cukru sa však môže nachádzať aj vzduch.

Keďže múka a cukor spolu chemicky nereagujú, tak ich výsledný objem nemôže byť väčší, ako súčet objemov jednotlivých zložiek. Ak by reagovali, tak sa môže stať, že sa objem nafúkne. Napríklad kypriaci prášok zvykne zmes nafúknuť. Síce sa v danej zmesi vytvoria len bublinky vzduchu, napriek tomu to však považujeme za zväčšenie objemu. Iné chemické reakcie dokážu tiež spôsobiť zväčšenie, ako aj zmenšenie objemu.

Vyjadrime si objem našej zmesi ako rovnosť a skúsme sa zamyslieť, či bude platiť:

$$V_{\text{zmes}} = V_{\text{cukor}} + V_{\text{múka}}.$$

Vieme, že keby sme zmiešavali dve rovnaké látky, tak by nám naša rovnosť určite platila. My však máme dve rôzne látky. V takomto prípade nám výsledný objem závisí na veľkosti jednotlivých zrníčok. Napríklad, ak nasypeme piesok do štrku a poriadne ich zamiešame, tak objem zmesi bude menší ako súčet objemov piesku a štrku. Je to tak preto, lebo piesok sa dostane do priestorov medzi kameňmi, kde predtým bol iba vzduch.

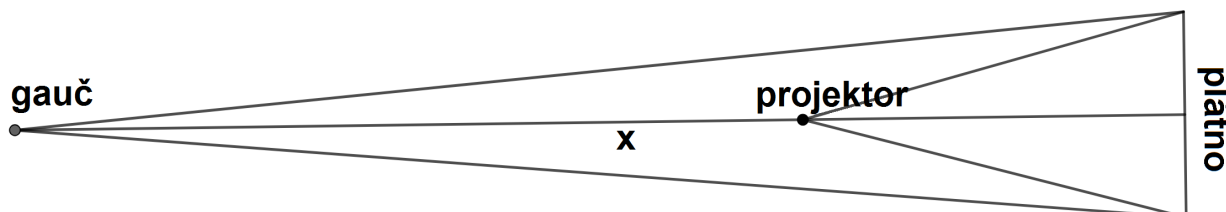
Toto nám teda napovedá, že ak múka a cukor nemajú rovnako veľké zrníčka, čo nemajú, tak objem ich zmesi bude menší ako súčet objemov múky a cukru. Upravíme si teda našu rovnosť na nerovnosť a sme hotoví.

$$V_{\text{zmes}} < V_{\text{cukor}} + V_{\text{múka}}.$$

2.2 Filmové nezhody

vzorák M&M, opravoval M&M

Najprv povedzme, že pohodlne sa pozerá na obraz, ak spojnica vašich očí a stredu obrazu je kolmá na rovinu obrazu. Inými slovami, vaše oči sú vtedy najbližšie ku stredu obrazu spomedzi všetkých bodov obrazu. Uhol, pod ktorým projektor svieti, je uhol medzi „ľavým“ a „pravým“ okrajom svietenia, rovnako ako aj zorný uhol vedúcich. Tí sedia vo vzdialenosti x od plátna. Môžeme si teda predstaviť situáciu ako dva rovnoramenné trojuholníky s totožnou základňou y a uhlami pri vrcholoch 30° a 10° .



Obrázok 1: Situácia pri pohľade zhora

Dĺžku polovice základne vypočítame zo vzťahov pre tangens $\tan 5^\circ = \frac{y}{2x}$, odkiaľ $y = 2x \tan 5^\circ$. Následne potrebujeme nájsť minimálnu vzdialenosť z projektora k plátnu a znova na to využijeme vzťah pre tangens $\tan 15^\circ = \frac{y}{2z}$. Vylúčením neznámej veľkosti plátna y dostaneme minimálnu vzdialenosť projektora z ako

$$z = \frac{\tan 5^\circ}{\tan 15^\circ} x \approx 0,3265x.$$

Na záver poznamenajme, že tvar gauča taký, aby sa všetci pozerali na plátno pod uhlom 10° , by bol kružnicový oblúk. V skutku autor tento fakt využil pri kreslení (nie rysovaní) obrázku avšak táto kružnica sa však iba s pomocou pravítka a kružidla nedá narysovať, ak máme zadané plátno y a projektor. Inak by sme mali trisekciu uhla, a to možné nie je. Pre niektoré špeciálne hodnoty by to išlo ako napríklad 90° a 30° avšak pre naše nie.

2.3 Ani kvapka nazmar!

vzorák **Tomáš**, opravoval **Tomáš**

Postup:

Ako zmerať objem vody, ktorá prečnieva nad okraj pohára? Dá sa to viacerými spôsobmi.

Vieme “od oka” odhadnúť, kde je okraj pohára a naliať vodu do výšky tohto okraja. Potom nám stačí dokvapkať vodu z mernej pipety, dokiaľ sa nezačne voda z pohára vylievať. Objem prebytočnej vody je ten objem, ktorý sme vykvapkali z pipety.

Vieme odhadnúť, kde je okraj pohára, o niečo **presnejšie**?

Najskôr pomaly naplníme pohár, až kým z neho nezačne voda kvapkať von, a potom odstránime **prečnievajúcu vrstvu** vody. Odstrániť ju môžeme tak, že na pohár zvrchu pomaly položíme rovné teleso, ako je napríklad plastová kuchynská doska. Tým sa z pohára vytlačí všetka voda, ktorá prečnieva cez okraj.

Potom ešte treba opatrne **utrieť okraj** pohára, keďže je možné, že pri dokvapkavaní z pipety vplyvom mokrého okraja začne voda odtekať skôr ako pri suchom okraji (toto spôsobuje kohézia vody - voda na okraji priťahuje vodu prečnievajúcu z pohára k sebe, čo jej umožňuje ľahšie odtekať¹).

Takže vieme si takto naplniť pohár presne po jeho okraj, a potom dokvapkať vodu pipetou, ako bolo spomenuté vyššie. Ak nemáme pipetu, použijeme najvhodnejšiu inú odmerku alebo malé telieska, ktoré nahádzeme dnu a po vytiahnutí zmeráme ich objem tak, že ich vložíme do odmerného valca s vodou.

Iný postup by mohol vyzeráť takto: naplníme pohár až po jeho maximálnu kapacitu, a potom prečnievajúcu vodu vytlačíme preč, pričom ju ale zachytíme do zbernej nádoby. Zo zbernej nádoby ju potom prelejeme do vhodne veľkej odmerky a zistíme jej objem. Tu existuje jeden **väčší problém** - ako vieme, keď vylejeme vodu z nádoby, menšie množstvo vie stále ostať v nádobe, lebo prilne k povrchu nádoby, a tak odolá gravitačnej sile. Teda nameriame menej vody, ako sme jej zo šálky vytlačili. Nevieme ani úplne rozumne vypočítať, koľko vody ostalo v zbernej nádobe, nakoľko k príľnavosti môže dôjsť na celom povrchu zbernej nádoby a vie sa vytvoriť veľa oddelených mláčok vody, ktorých objem nevieme odhadnúť.

Autor vzoráku najskôr vyskúšal druhý postup, no po tom, čo bol upozornený na jeho nedostatky, si vybral ten prvý a meranie vykonal ešte raz.

Výsledky:

Tvar šálky: klasický valec s plochým dnom, nič nezvyčajné.

Rozmery šálky: výška 9,5 cm, priemer 8 cm; **Objem** = 477 ml.

¹ ako presne funguje kohézia sa dočítate nižšie v tomto vzoráku

Kolko saponátu: 1 čajová lyžička

	Voda [ml]	Odchýlka od priemeru [ml]	Jarová voda [ml]	Odchýlka od priemeru [ml]
1. meranie	29	0.33	20	1
2. meranie	28	0.66	19	0
3. meranie	29	0.33	18	1
Priemer	28.66	0.44	19.00	0.66

Analýza výsledkov:

Ako vidíme, jarová voda vytvorila o približne tretinu menší “kopček” na pohári ako čistá voda. Prečo vôbec takýto “kopček” vzniká? Dôvodom sú vodíkové mostíky v molekule vody. Tým, že väzba medzi kyslíkom a vodíkmi je polárna (elektrón sa viac prikláňa k jednému atómu, ako k druhému), teda máme kladne nabité vodíky a záporne nabité kyslíky. Medzi vodíkmi a kyslíkmi rôznych molekúl vody potom vzniká príťažlivá sila, a teda väčšie množstvá takýchto látok zvyknú do nejakej miery držať pohromade. Tento jav sa volá **kohézia**. Kohézia spôsobuje aj to, že malé množstvo vody vie prečnievať cez okraj doplna naplneného pohára a nevyliť sa.

Čo teda spôsobuje, že kohézia je slabšia, keď je vo vode saponát? Saponát funguje tak, že jeden koniec jeho komplikovanej molekuly je hydrofóbny – odpudzuje sa s molekulami vody a viaže sa s molekulami mastnoty (tukov). Druhý koniec je hydrofilný – viaže sa s vodou a spôsobuje, že mastnota je strhnutá z čisteného povrchu a odplavená vodou.

Keď nalejeme saponát do vody, hydrofilné konce molekúl sa naviažu na molekuly vody, no hydrofóbne konce sa s vodou odpudzujú. Vránci vody prečnievajúcej z pohára sa toto prejaví tak, že táto odpudivá sila pôsobí proti kohéznej sile, a teda je kohézia slabšia. Prečnievajúcej vody teda musí byť menej, pretože sa ľahšie roztečie.

2.4 KozmonauTerka

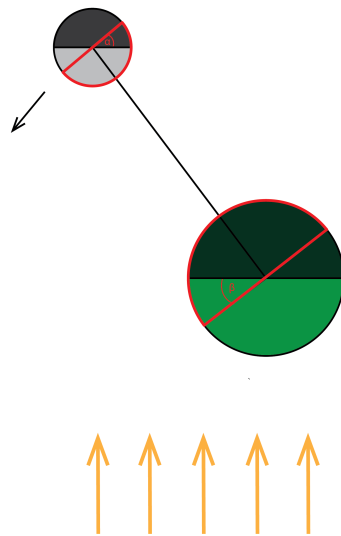
vzorák Kebab, opravoval Kebab

V našej úlohe budeme predpokladať, že Mesiace aj Zem sú dokonalé gule a že vzdialenosť Zem-Mesiace je zanedbateľná voči vzdialenosti Slnko-Zem. Podobne predpokladajme, že osvetlená časť Mesiaca bude nezávislá na našej polohe na Zemi,² a podobne aj osvetlená časť Zeme. Toto platí v realite iba do istej miery, no nám to bude pre úvahy stačiť.

Na začiatku sa spoločne zamyslime, čo môžeme na guľových planétach naraz vidieť. Zoberte si jablko a zavrite jedno oko. Koľko, resp. akú časť jablka sa vám podarí naraz vidieť? Je to vždy polovica gule, a to vždy tá, ktorej hranice sú akoby na okraji nášho videnia jablka. Táto hranica je pritom kružnica, ktorá je “kolmá” na spojnicu oka a stredu jablka. To isté platí pri planétach. Z pohľadu Slnka je vždy osvetlená polovica Zeme a existuje určitá kružnica na Zemi, kde v tom momente pozorujeme východ alebo západ Slnka. Podobne je to s Mesiacom a Zemou. Tiež vidíme iba polovicu, a to tú otočenú na nás.³ Môžeme si teda nakresliť obrázok, kde vidíme časť Mesiaca, ktorá je viditeľná zo Zeme, a časť Zeme viditeľnú z Mesiaca.

²teda či sme v Ázii alebo v Amerike

³Keďže Mesiace obieha okolo Zeme rovnakou uhlovou rýchlosťou ako sa točí okolo svojej osi, vždy vidíme tú istú časť Mesiaca

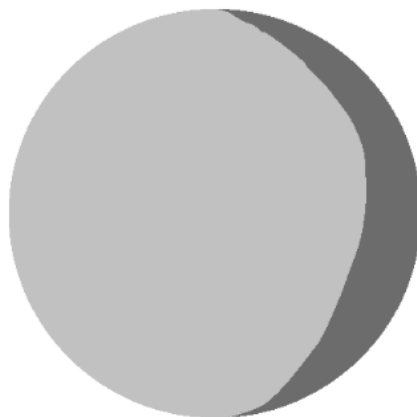


Obrázok 2: Pohľad zhora, červenou sú označené viditeľné časti z druhého objektu

Keďže naše predpoklady boli, že vzdialenosti voči Slnku sú naozaj obrovské, môžeme usúdiť, že uhly alfa aj beta sú na našom obrázku zhodné vďaka rovnobežnostiam a striedavým uhlom. Teda oblasť tmy pozorovaná z Mesiaca je pomerovo rovnako veľká ako časť svetla pozorovaná na Mesiaci zo Zeme. A taktiež opačne, časť svetla pozorovaná z Mesiaca je pomerovo zhodná s časťou tmy pozorovanej na Mesiaci. Z toho teda vyplýva, že Mesiac pozorovaný zo Zeme je osvetlený presne opačne ako je Zem osvetlená z pohľadu Mesiaca. Náš hľadaný obraz Mesiaca je teda negatív obrazu Zeme z Mesiaca. Ten už nakreslíme ľahko.



Obrázok 3: Z dielne vedúcich :) Mesiac je naozaj skoro celý jasný



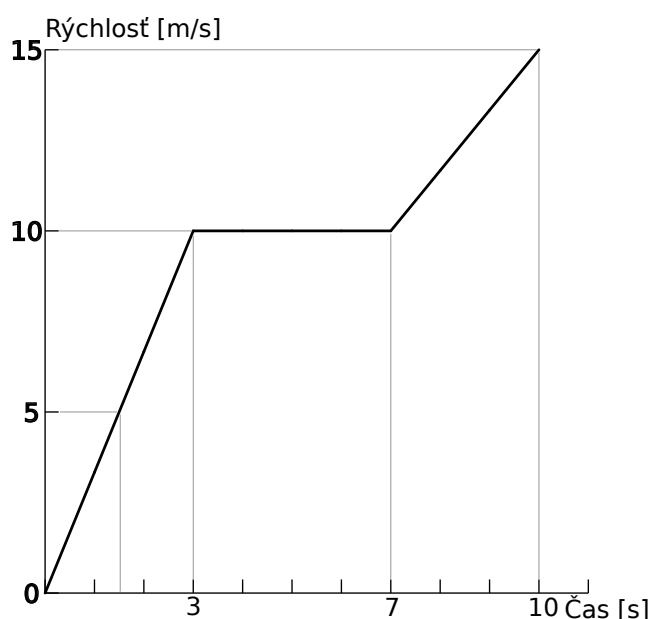
Obrázok 4: Z dielne účastníkov (Adam Póša :) Na tomto obrázku pekne vidieť, že tieň musí ísť vždy takmer presne od pólu k pólu

Ostáva vyriešiť, čo sa bude s Mesiacom diať ďalej. Keď ste niekedy pozorovali Mesiac, mohli ste si všimnúť, že hranica svetla na Mesiaci z pohľadu Zeme ide sprava doľava (ak sme na severnej pologuli). Z pohľadu zhora⁴ sa Mesiac totiž hýbe v protismere hodinových ručičiek okolo Zeme. Keď sa pozrieme na náš obrázok vyššie, vidíme, že pri tomto pohybe sa blíži do fázy „nov“, čiže do fázy, kedy ho vôbec nevidíme. Z toho všetkého vyplýva, že Mesiac bude „ubúdať“.

2.5 Išiel kufor na vandrovku

vzorák M&M, opravoval M&M

Stačí si uvedomiť, že medzi kufrom a vlakom neexistuje trenie, teda kufrík sa bude pohybovať počiatočnou rýchlosťou vlaku, ale vzhľadom na tunel. To znamená, že súčet rýchlosti vlaku a kufríku v ňom bude konštantných 15 m/s. Preto graf bude vyzeráť nasledovne:



Obrázok 5: Závislosť rýchlosti kufru vzhľadom na vlak od času pri brzdení

⁴Pohľad zhora definujeme ako pohľad kolmý na obežnú dráhu Zeme, z ktorého je vidieť severný pól

Vzdialenosť spočítame ako plochu pod grafom funkcie rýchlosti kufríka v súprave.⁵ Spočítame to po častiach. Po prvých troch sekundách vozík prešiel $\frac{30}{2}$ metrov. Po ďalších štyroch sekundách prešiel ďalších 40 metrov. Ďalšie tri sekundy precestoval ďalších $30 + \frac{15}{2}$ metrov. A nakoniec cestoval ešte 2 sekundy finálnou rýchlosťou, kým nenarazil, teda precestoval ďalších 30 metrov. Dokopy teda precestoval 122,5 metra. Preto Marek sedel 122,5 metra od začiatku súpravy.

⁵Klasický vzorec $s = v \cdot t$ už poznáte, a teda si stačí rozmyslieť, že v skutočnosti na grafe rýchlosť od času bude vzdialenosť vyobrazená ako plocha.