Riešenia 3. kola letnej časti

3.1 Diagnóza od fyzika

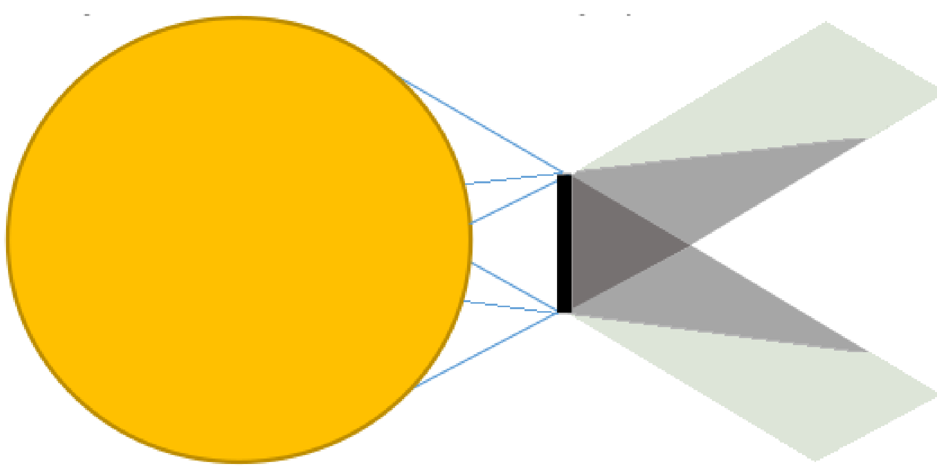
vzorák **Tomáš**, opravoval **Tomáš**

Čo spôsobuje rozmazanie slnečného tieňa? Viacerí ste označili za dôležitý faktor tzv. difrakciu svetla. Aj keď difrakcia môže do nejakej miery ovplyvňovať „rozmazanosť" tieňa, existuje iný faktor, ktorý je *omnoho* dôležitejší. A to je tento: Slnko je **veľké** - a vyžaruje svetlo z každého bodu svojho povrchu.

Najskôr sa pozrieme na tú hlavnú príčinu, teda veľkosť Slnka. Ak by bolo slnko bodovým zdrojom, t.j. jediným bodom, ktorý by vyžaroval také množstvo svetla, ako v skutočnosti vyžaruje celé Slnko, tak pre každý malý bod na zemskom povrchu by sme vedeli jednoznačne určiť, či je osvietený Slnkom alebo je v tieni. Buď na spojnici (priamej čiare) medzi (bodovým) Slnkom a daným miestom na Zemi nie je nič, čo by blokovalo priamy lúč svetla zo Slnka, alebo tam je nejaká prekážka. Na základe toho by sme potom bod na Zemi označili za úplne osvetlený alebo úplne tmavý.

Keďže v skutočnosti je povrch Slnka väčší než jeden bod, tak na jedno miesto na zemskom povrchu vie svietiť viacero lúčov z rôznych miest na povrchu Slnka, alebo naopak lúče z iných miest na Slnku sú po ceste k nemu zablokované prekážkou. Na základe toho vie byť toto miesto osvetlené do rôznej miery, teda tu nie sú len dve možnosti.

Keď sa zamyslíme nad tým, ako toto funguje s celými objektmi, vieme prísť na to, že slnečný tieň bežného objektu bude vyzerať asi takto:



Obrázok 1: *Z dielne účastníkov (Anamária Šutková), upravené do vzoráku: V tieni objektu vieme nájsť oblasti s rôznou mierou zatienenia)*

Vidíme, že smerom von z oblasti absolútneho tieňa sa vedia nachádzať viac osvetlené oblasti, ktoré tvoria polotieň. Tieto sú osvetlené lúčmi prichádzajúcimi z niektorých častí slnečného povrchu, ale nie zo všetkých. Toto sa deje na okraji akéhokoľvek tieňa, pričom my to vnímame ako „rozmazanosť" okraja. Toto obzvlášť platí ak je objekt ktorému patrí tieň členitý, a teda aj okraj tohto tieňa bude mať členitý výzor čo sa týka rôznych úrovní zatienenia.

Samozrejme, Slnko je aj **veľmi ďaleko** od Zeme, preto uhol medzi lúčmi prichádzajúcimi zo stredu tej časti slnečného povrchu, ktorá je obrátená k Zemi, a z jej okraja bude len asi 0,26°. Aj takýto malý uhol však dokáže spôsobiť, že tieň objektu vysokého okolo 2 m (napríklad človeka) bude mať asi 1 cm širokú oblasť polotieňa na svojom okraji.

Je však treba spomenúť, že **obrázok** v tomto vzoráku slúži len na priblíženie princípu a **nezobrazuje skutočné pomery** medzi veľkosťou Slnka a vzdialenosťou Slnka od Zeme, a tým pádom ani skutočný pomer veľkosti tieňa a polotieňa.

Ešte si povedzme, ako je to s tou **difrakciou**. Difrakcia je ohyb svetla okolo okraja predmetu - výsledkom je, že stopa svetla na povrchu za predmetom je trochu iná, ako by sa zdalo z jednoduchého geometrického výpočtu. Svetlo sa dostane aj na niektoré miesta, od ktorých nevedie k zdroju svetla rovná, ničím nezablokovaná čiara (t.j. sú za prekážkou).

Uvažovať o nejakom odrážaní sa fotónov od okraja predmetu však nie je úplne tá najsprávnejšia vec - naopak, difrakcia je príkladom toho, keď sa svetlo správa ako vlny. Vlny svetla zo Slnka sa teoreticky vedia šíriť aj za prekážku, ale ide o to, že tie vlny ktoré sa za tú prekážku dostanú sa podľa príslušnej matematiky navzájom vyrušia. To však neplatí pre úplne všetky body za tou prekážkou - niekde sa vlny navzájom nevyrušia úplne a to vnímame tak, že tam dopadá svetlo. Pre lepšie pochopenie odporúčame pozrieť si tento[1] obrázok.

Je však všeobecne známym faktom, že difrakcia, čo sa týka rozmazanosti slnečného tieňa, hrá len malú úlohu - ako už bolo spomínané, oveľa dôležitejšia je veľkosť Slnka (skúsený fyzik by vám to vedel dokázať experimentom alebo výpočtom).

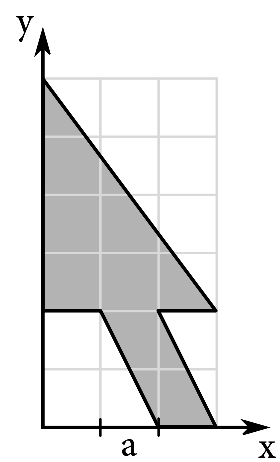
3.2 Ťažiská sú v kurz(or)e

vzorák **Lukáš G.**, opravoval **Lukáš G.**

Ak chceme nájsť ťažisko nejakého komplikovanejšieho útvaru, tak si ho rozdelíme na nejaké jednoduchšie (napr. trojuholník, rovnobežník, …), pri ktorých vieme určiť ťažisko a ťažisko nášho útvaru je váženým priemerom ťažísk jednoduchších útvarov. Platí pritom, že ako váhu ťažiska určíme hmotnosť tohto jednoduchšieho útvaru. Keďže však kurzor je vyrobený z materiálu s rovnomerne rozloženou hustotou a výška kurzora je všade rovnaká, môžeme hmotnosť zameniť za obsah. Inými slovami, pre každý z jednoduchších útvarov súradnice jeho ťažiska vynásobíme jeho obsahom, tieto súčiny sčítame a výsledok vydelíme obsahom výsledného útvaru. Túto myšlienku si treba zapamätať, pretože sa pri úlohách s ťažiskom častokrát využíva a aj my ju ešte viackrát využijeme pri riešení.

[1] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Single_Slit_Diffraction.svg

Ťažisko pôvodného kurzora



Obrázok 2: *Kurzor pred ulomením hrotu*

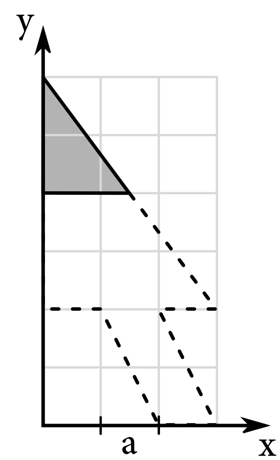
Všimnime si, že kurzor sa pred kolíziou skladal z trojuholníka a rovnobežníka. Ťažisko trojuholníka sa nachádza v tretine výšky trojuholníka, takže súradnice ťažiska trojuholníka sú $T_\triangle = \left[a, \frac{10}{3}a\right]$. Jeho obsah je $S_\triangle = \frac{3a\cdot 4a}{2} = 6a^2$. Ťažisko rovnobežníka sa nachádza v priesečníku uhlopriečok, preto sú súradnice ťažiska rovnobežníka $T_\lozenge = \left[2a, a\right]$. Jeho obsah vypočítame ako $S_\lozenge = a \cdot 2a = 2a^2$. Z týchto informácii vieme súradnice ťažiska kurzora T_{kurzor} vypočítať ako:

$$x(T_{\mathrm{kurzor}}) = \frac{x(T_\triangle)S_\triangle + x(T_\lozenge)S_\lozenge}{S_\triangle + S_\lozenge} = \frac{a\cdot 6a^2 + 2a\cdot 2a^2}{6a^2 + 2a^2} = \frac{10a^3}{8a^2} = \frac{5}{4}a,$$

$$y(T_{\mathrm{kurzor}}) = \frac{y(T_\triangle)S_\triangle + y(T_\lozenge)S_\lozenge}{S_\triangle + S_\lozenge} = \frac{\frac{10}{3}a\cdot 6a^2 + a\cdot 2a^2}{6a^2 + 2a^2} = \frac{22a^3}{8a^2} = \frac{11}{4}a.$$

Ťažisko kurzora pred kolíziou je preto v bode $T_{\mathrm{kurzor}} = \left[\frac{5}{4}a, \frac{11}{4}a\right]$.

Ťažisko kurzora po kolízii



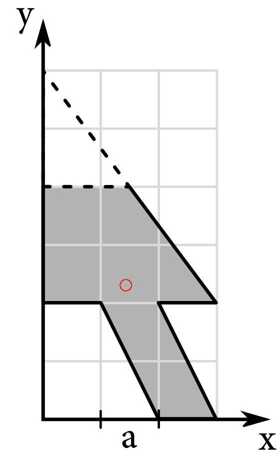
Obrázok 3: *Úlomok kurzora*

Z kurzora sa nám ulomil hrot v tvare trojuholníka (zobrazený na obrázku 3), ktorý má ťažisko opäť v tretine svojej výšky, čiže $T_{\text{úlomok}} = \left[\frac{1}{2}a, \frac{14}{3}a\right]$. Jeho obsah je $S_{\text{úlomok}} = \frac{\frac{3}{2}a \cdot 2a}{2} = \frac{3}{2}a^2$. Ako však z týchto informácii vypočítame celkové ťažisko? Ak máme výsledné ťažisko a ťažisko hrotu, tak ich váženým aritmetickým priemerom je ťažisko pôvodného kurzora. Ak by sme si zapísali rovnice a vyjadrili z nich výsledné ťažisko, tak si všimneme, že sa to opäť podobá na vážený aritmetický priemer, ale pred údajmi hrotu je znamienko mínus. Tento trik si vieme predstaviť aj tak, že si zoberieme pôvodný kurzor a potom hrot so zápornou hmotnosťou. Ich zlúčením dostaneme práve výsledný útvar, a teda ťažisko vieme vypočítať naozaj ako vážený priemer so znamienkom mínus. Teraz už súradnice ťažiska T kurzora bez hrotu vieme vypočítať ako:

$$x(T) = \frac{x(T_{\text{kurzor}})(S_\triangle + S_\Diamond) - x(T_{\text{úlomok}})S_{\text{úlomok}}}{S_\triangle + S_\Diamond - S_{\text{úlomok}}} = \frac{\frac{5}{4}a \cdot 8a^2 - \frac{1}{2}a \cdot \frac{3}{2}a^2}{6a^2 + 2a^2 - \frac{3}{2}a^2} = \frac{\frac{40a^3 - 3a^3}{4}}{\frac{13a^2}{2}} = \frac{37}{26}a,$$

$$y(T) = \frac{y(T_{\text{kurzor}})(S_\triangle + S_\Diamond) - y(T_{\text{úlomok}})S_{\text{úlomok}}}{S_\triangle + S_\Diamond - S_{\text{úlomok}}} = \frac{\frac{11}{4}a \cdot 8a^2 - \frac{14}{3}a \cdot \frac{3}{2}a}{6a^2 + 2a^2 - \frac{3}{2}a^2} = \frac{22a^3 - 7a^3}{\frac{13a^2}{2}} = \frac{30}{13}a.$$

Ťažisko kurzora po kolízii je teda na súradniciach $T = \left[\frac{37}{26}a, \frac{30}{13}a\right]$. Keď si tento bod zakreslíme do obrázka, vidíme, že ťažisko zostalo v trojuholníkovej časti kurzora.



Obrázok 4: *Výsledné ťažisko*

3.3 Limonádová fontánka

vzorák **Kubo K.**, opravoval **Kubo K.**

V tejto úlohe ste mali za úlohu zmerať teplotnú objemovú rozťažnosť vody. Ak ste sa s týmto javom ešte vo fyzike nestretli[2], je to presne to, čo napovedá názov - teda to predstavuje, o koľko sa daný objem látky zväčší v závislosti od zmeny jeho teploty. Za domácu úlohu si môžete premyslieť, prečo sa pri zahrievaní látok bez zmeny skupenstva zväčšuje ich objem. Pri lineárnej objemovej rozťažnosti platí vzťah:

$$V_1 = V_0 + \Delta V = V_0\left(1 + \beta\Delta t\right), \tag{1}$$

kde V_0 je pôvodný objem látky (pred zahriatím), V_1 je jej objem po zahriatí, Δt je zmena teploty a β je súčiniteľ teplotnej objemovej rozťažnosti. My sme od vás chceli, aby ste zmerali práve tento súčiniteľ. Z rovnice (1) si preň vieme odvodiť vzorec $\beta = \frac{V_1 - V_0}{V_0 \Delta t} = \frac{\Delta V}{V_0 \Delta t}$, takže bolo potrebné zmerať len 3 veličiny, a to: pôvodný objem V_0, zmenu teploty Δt (je už jedno, či v stupňoch Celzia alebo v Kelvinoch) a zmenu objemu ΔV.

Najprv si bolo potrebné vybrať vhodnú aparatúru. Keďže je zmena objemu ΔV priamoúmerná pôvodnému objemu V_0 a chceme mať čo najmenšiu odchýlku merania, bolo vhodné pri meraniach pracovať s čo najväčším objemom vody (ale len takým, aby ste ho boli schopní zahrievať rovnomerne) a tomu prispôsobiť výber nádoby. Na zahrievanie ste mohli použiť kahan, šporák, varič, kanvicu (vtedy by ste merali len samotné ochladzovanie), ale aj napríklad len sviečku.

Ďalšou podstatnou časťou bolo nájsť si vhodný spôsob odčítania zmeny objemu ΔV. Táto zmena sa dala merať aj napríklad hustomerom[3] (za predpokladu konštantnej hmotnosti), ale asi najbežnejším spôsobom bolo klasické odčítanie rozdielu výšky hladiny v nádobe. Ja osobne som preto použil ako nádobu varnú banku s úzkym hrdlom, aby som mohol čo najpresnejšie určovať zmenu výšky hladiny, ale stále môcť použiť relatívne veľký objem vody.

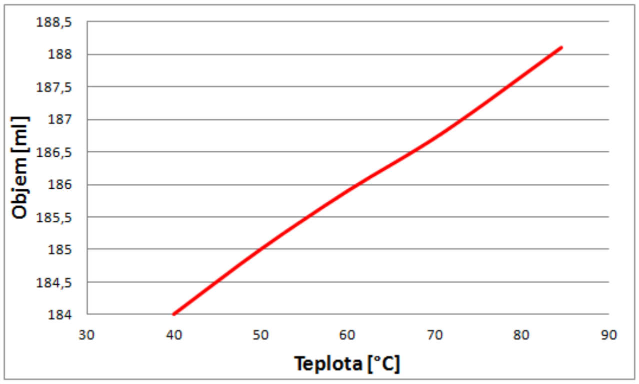
Pri samotnom meraní bolo dobré použiť dostatočne veľký rozdiel teplôt Δt (aspoň nejakých 10 °C), ale zároveň čo najviac zabrániť strate vody odparovaním. Rovnako ako pri všetkých pokusoch, aj tu bolo dôležité kvôli presnosti výsledkov merania opakovať, merať na rôznych teplotných intervaloch, kvôli odstráneniu chýb spôsobených

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Thermal_expansion

[3] V takomto prípade by sme si odvodili rovno vzorec s využitím zmeny hustoty $\beta = \frac{\rho_0}{\Delta\rho\,\Delta t}$.

odparovaním vody merať najprv zväčšovanie a potom aj zmenšovanie objemu vody[4] a samozrejme vyrátať aspoň nejakú odchýlku merania.

My sme merania opakovali (s každým postupom) 3 krát a odčítavali sme zmenu objemu približne po každých 5 °C, tu môžete vidieť graf závislosti zmeny objemu od zmeny teploty z jedného z meraní, pri ktorom sme vodu zahrievali.



Obrázok 5: *Objem vody v závislosti od jej teploty*

Výsledná nameraná hodnota závisela aj od použitej vody, vaše výsledky sa mali pohybovať okolo tabuľkovej hodnoty súčiniteľa teplotnej objemovej rozťažnosti vody $\beta = 2 \times 10^{-4}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$. Nám vyšla hodnota o niečo vyššia, naša priemerná nameraná hodnota bola približne $\beta = 3 \times 10^{-4}\ \frac{1}{\mathrm{K}} \pm 8 \times 10^{-5}\ \frac{1}{\mathrm{K}}$.

3.4 Stop plytvaniu!

vzorák **Lukáš G.**, opravoval **Lukáš G.**

V zadaní máme, že odpor je priamo úmerný dĺžke[5]. Preto si vieme zapísať, že

$$R = cl$$

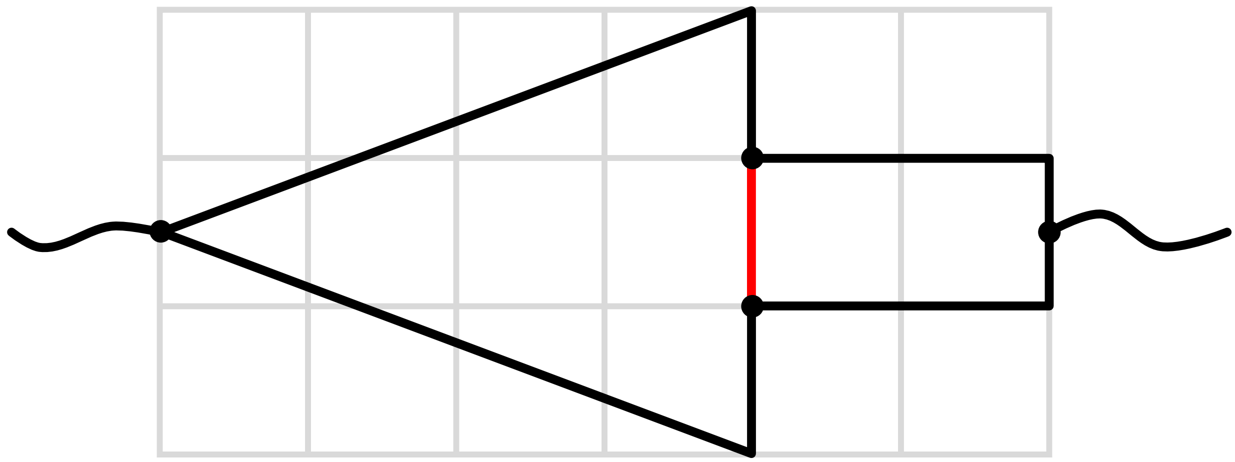
pre nejakú konštantu úmernosti c medzi odporom a dĺžkou vodiča. Na začiatok by bolo zaujímavé zistiť, aký prúd prechádza pôvodnou šípkou. Na to si na ňu budeme musieť posvietiť.

Ako si zjednodušiť úlohu?

Keď máme úlohu s elektrickými obvodmi, tak sa častokrát snažíme porozkladať si obvod na jednoduchšie časti, ktoré sú buď v sériovom alebo paralelnom zapojení, pretože na tie poznáme vzorčeky, a teda sa už potom dopočítame k výsledku. Kurzor na prvý pohľad vyzerá na paralelné zapojenie, no kazí nám to tam jeden vodič (na obrázku 6 znázornený červenou), ktorý vetvy prepája.

[4] Pri počítaní so zmenšovaním objemu (ochladzovaním) sa nám trochu upraví vzorec, pretože sa nám vymenia hodnoty V_0 a V_1.

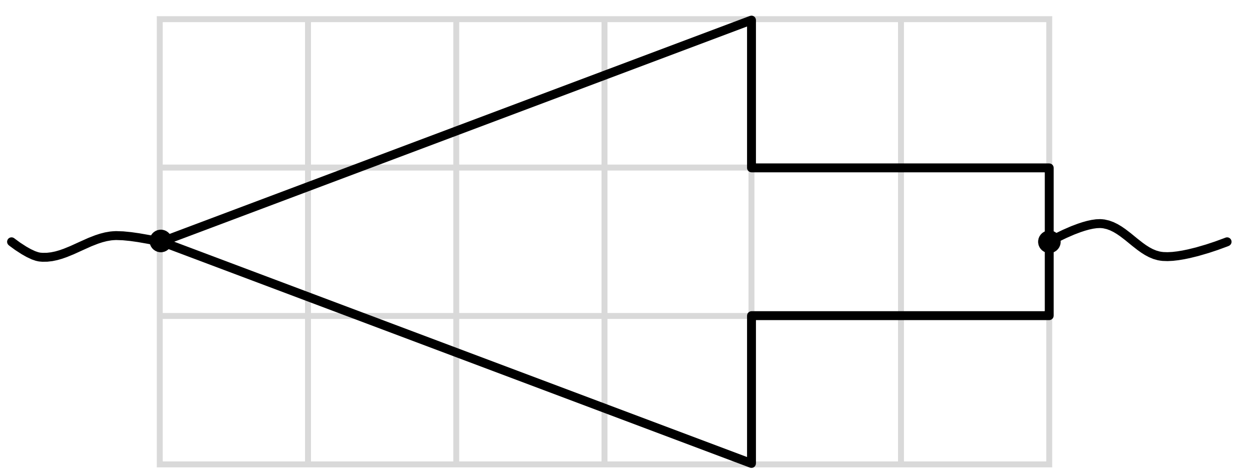
[5] túto informáciu vieme zapísať aj ako $R \propto l$ - značenie $\propto$ hovorí o priamej úmere medzi dvoma veličinami



Obrázok 6: *Podozrivé spojenie v kurzore*

Keď sa však na schému lepšie zahľadíme, tak si všimneme, že je horizontálne symetrická. Čo to ale ovplyvní? Do obidvoch uzlov, v ktorých má červený vodič počiatok, kvôli symetrii tečie rovnaké množstvo prúdu. Tieto dva uzly potom majú rovnaké potenciály, a teda napätie medzi nimi (čiže rozdiel potenciálov okrajových uzlov) je nulový. No a z toho, že napätie je nulové, už podľa Ohmovho zákona ľahko prídeme na to, že prúd pretekajúci týmto vodičom je $I = \frac{U}{R} = \frac{0}{R} = 0$. Trochu iný pohľad do tejto problematiky je, že nakoľko do okrajových uzlov vteká rovnaký prúd, tak aj do červeného vodiča z oboch uzlov vteká rovnaký prúd. Tieto prúdy sa nám ale navzájom vynulujú, a teda výsledný prúd pretekajúci vodičom je nulový. Ako sme si týmto pomohli? Nakoľko nás zaujíma, aký prúd preteká obvodom, tak nakoľko červeným vodičom prúd nepreteká, môžeme ho z obvodu odstrániť. Následne už dostaneme paralelné zapojenie, ktoré vieme jednoducho dopočítať.

Aký prúd prechádza pôvodným kurzorom?



Obrázok 7: *Zjednodušený kurzor*

Nakoľko už máme obvod v stave, že ide o paralelné zapojenie, môžeme sa pustiť do počítania odporu kurzora. Nakoľko odpor je závislý od dĺžky drôtu, musíme zistiť, aký dlhý je drôt vo vetvách. Využijeme pri tom, že prepona pravouhlého trojuholníka sa z Pytagorovej vety dá vypočítať ako $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dĺžka drôtu jednej vetvy je:

$$l_{\text{vetva}} = \frac{1}{2}a + 2a + a + \sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^2 + (4a)^2} = \frac{7}{2}a + \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + \frac{64}{4}a^2} = \frac{7}{2}a + \frac{\sqrt{73}}{2}a = \frac{7 + \sqrt{73}}{2} \cdot a.$$

Potom odpor jednej vetvy vypočítame ako:

$$R_{\text{vetva}} = cl_{\text{vetva}} = \frac{7 + \sqrt{73}}{2} \cdot ac.$$

No a nakoniec pre celkový odpor R obvodu platí:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_{\text{vetva}}} + \frac{1}{R_{\text{vetva}}}, \\ &= \frac{2}{R_{\text{vetva}}}, \\ R &= \frac{1}{2}R_{\text{vetva}} = \frac{7 + \sqrt{73}}{4} \cdot ac. \end{aligned}$$

Aký tvar drôtu spotrebuje najmenej materiálu?

Keďže kurzor je vlastne paralelné zapojenie, tak intuitívne to vyzerá tak, že najmenšie plytvanie materiálom dosiahneme pri sériovom zapojení, t.j. keď drôt nebude obsahovať žiadne uzly. Bolo by však vhodné toto tvrdenie aj nejako zdôvodniť. Zoberme si teda nejaké zapojenie, ktoré je rozvetvené a prúdi ním rovnaký prúd, ako prúdil kurzorom. Teraz si zoberme dve časti obvodu s odpormi R_1, R_2, ktoré sú zapojené paralelne. Ich odpor vieme vypočítať ako

$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}.$$

Keby sme však tieto dve časti obvodu preskupili a dali ich do sériového zapojenia, tak by sme tým dosiahli odpor

$$R_s = R_1 + R_2.$$

Teraz ukážeme, že $R_s > R_p$ pre akékoľvek hodnoty R_1, R_2.

$$R_s = R_1 + R_2 > R_1 = R_1 \cdot 1 > R_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = R_p.$$

Toto je samozrejme len jeden z množstva spôsobov, akým sa dala táto nerovnosť dokázať.[6] Ak by sme takýto postup opakovali, dokým by bolo čo preskupovať, dosiahli by sme stav sériového zapojenia, ktorý by mal ostro väčší odpor ako obvod na začiatku. Nakoľko však napätie zdroja je konštantné a okrem toho potrebujeme, aby obvodom pretekal rovnaký prúd ako predtým, tak z Ohmovho zákona máme, že aj odpor obvodu musí byť rovnaký. Preskupovaním paralelných zapojení do sériových sa nám však odpor zvyšoval, a aby sme ho znížili, potrebuje-

[6] Ak vás baví matematika, tak vás možno zaujme, že táto nerovnosť sa dala dokázať aj pomocou *nerovnosti medzi aritmetickým a harmonickým priemerom* (často označovanej aj ako *AH nerovnosť*). Môžete sa o to pokúsiť aj vy. Viac o nej si môžete prečítať na `https://cs.wikipedia.org/wiki/Nerovnosti_mezi_pr%C5%AFm%C4%9Bry`.

me skrátiť dĺžku získaného drôtu. Z vyššie uvedených informácii vidíme, že pri sériovom zapojení spotrebujeme najmenej materiálu.

Záver

Ešte by nás zaujímalo, koľkokrát menej drôtu sme použili. Ako sme už vyššie ukázali, odpor musí byť rovnaký ako v pôvodnom kurzore, aby sa zachovala aj hodnota prúdu. Preto platí $R_{\text{vylepšenie}} = R = \frac{7+\sqrt{73}}{4} \cdot ac$. Nakoľko ale v našom vylepšení využívame iba jeden drôt bez uzlov, tak jeho odpor je priamo úmerný dĺžke (a rovnako aj dĺžka je priamo úmerná odporu)[7], a teda si dĺžku drôtu po vylepšení vieme vypočítať ako

$$l_{\text{vylepšenie}} = \frac{R_{\text{vylepšenie}}}{c} = \frac{7+\sqrt{73}}{4} \cdot a.$$

Nuž a keď si spomenieme, že dĺžku vetvy kurzora sme už počítali (netreba však zabudnúť na vodič, ktorý sme si vymazali), tak dĺžku drôtu spotrebovaného na kurzor vypočítame ako

$$l_{\text{kurzor}} = 2l_{\text{vetva}} + a = \left(8+\sqrt{73}\right)a.$$

Pomer dĺžok drôtov použitých na odporové siete je teda

$$\eta = \frac{l_{\text{kurzor}}}{l_{\text{vylepšenie}}} \approx 4{,}25.$$

Dosiahli sme viac ako štvornásobné zlepšenie, sme teda so sebou spokojní a môžeme sa pustiť do ďalšej úlohy.

3.5 O Lukášoch a hojdačkách

vzorák **Pišta**, opravoval **Pišta**

Ako prvé sa pozrieme, v akých rovnovážnych polohách sú hojdačky. V prvom prípade je bod otáčania tesne nad zemou a ťažisko nad ním. V druhom prípade je bod otáčania zjavne vyššie ako ťažisko hojdačky. Teraz si predstavme, že do hojdačiek niečo udrie alebo zafúka vietor. Ťažisko oboch hojdačiek sa kúsok vychýli. V prvom prípade však gravitačná sila začne hojdačku pretáčať, až kým jedna strana nepadne na zem. V druhom prípade začne gravitačná sila pretáčať hojdačku naspäť do pôvodnej polohy. Prvá hojdačka je labilná a druhá stabilná[8].

Ďalej sa zamyslíme, čo sa stane, ak si na hojdačku sadnú obaja chlapci za predpokladu, že sú podobne ťažkí. Prvá hojdačka sa pravdepodobne pri nasadaní prevráti na jednu stranu. Aby sa chlapci mohli hojdať, musí sa vždy jeden odraziť nohami dosť silno, aby dostal ťažisko nad bod otáčania a až na druhú stranu. Ak by bol jeden výrazne ťažší, hojdačka by sa stále prevrátila na jeho stranu, pretože by ťažisko bolo bližšie pri ňom a nemohlo by sa dostať nad bod otáčania.

Druhá hojdačka sa bude správať podobne ako kyvadlo. Ak sa jeden z chlapcov odrazí, posunie hojdačku z rovnovážnej polohy. Ťažisko posunie spopod bodu otáčania a hojdačka sa bude snažiť dostať späť do polohy, kde bola, ale začne sa hojdať podobne ako kyvadlo. Samozrejme raz za čas sa bude musieť jeden z chlapcov odraziť, pretože hojdačka bude spomaľovať z dôsledku odporu vzduchu a trenia v bode otáčania.

[7] Pre funkcie f, g platí $f \propto g \iff g \propto f$, pretože ak je f priamoúmerná g s konštantou úmernosti c, tak g je priamoúmerná f s konštantou úmernosti $\frac{1}{c}$.

[8] Viac na https://sk.wikipedia.org/wiki/Rovnov%C3%A1%C5%BEna_poloha

Poznámka ku momentom síl: Keďže obe hojdačky majú rovnako dlhé ramená, takže aj momenty síl budú rovnaké na oboch hojdačkách v začiatočnej pozícii. Počas hojdania sa budú momenty síl meniť pretože sila nebude pôsobiť kolmo na rameno. Tieto zmeny momentov budú hojdačku dva stabilizovať a hojdačku jedna destabilizovať. Nakoľko tento jav je nad rámec základnej školy, nebudeme ho uvažovať pri hodnotení.