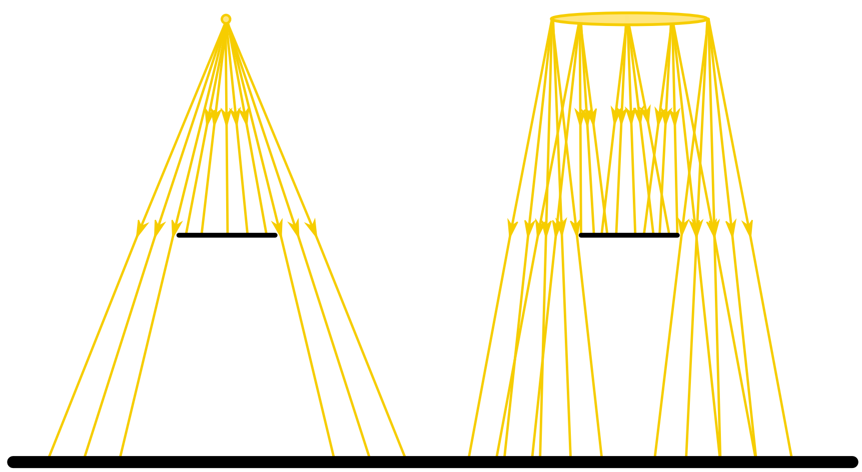
Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 V tieni A4

vzorák **Kubo K.**, opravoval **Kubo K.**

Z bežného života ste možno viac zvyknutí na prípad, kedy sa pri vzďaľovaní predmetu od zdroja svetla tieň na tienidle v konštantnej vzdialenosti zmenšuje. To znamená, že čím je predmet bližšie k tienidlu, tým má menší tieň a naopak, čím je bližšie k zdroju, tým má tieň väčší. Takto to funguje pre zdroje svetla menšie ako predmet, ktorého tieň sledujeme. Napríklad aj pri tieňovom divadle[1] sa používa takmer bodový zdroj svetla - napríklad: baterka, reflektor alebo projektor. Pre zdroje svetla väčšie ako pozorovaný predmet (väčšinou ide o plošné zdroje) to funguje naopak, pretože lúče z okraja zdroja prechádzajú okolo predmetu pod takým uhlom, že sa dostanú až zaň, a teda čím je predmet bližšie ku zdroju, tým sa dostanú lúče za ním bližšie k sebe, a tým bude jeho tieň na tienidle menší.

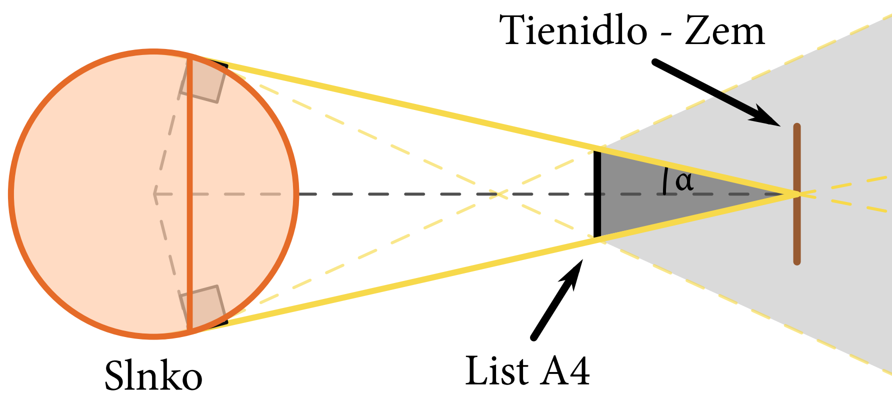


Obrázok 1: *Porovnanie bodového a plošného zdroja svetla*

Ak uvažujeme ako zdroj svetla Slnko a predpokladáme, že sa jeho lúče vo vesmíre ani v atmosfére nerozptyľujú, musíme s ním počítať ako s veľkým plošným zdrojom, pretože je rádovo oveľa väčší ako náš tieniaci predmet - list A4. Lúče, ktoré prichádzajú k listu z „okraja“ plošného zdroja v skutočnosti ležia na dotyčniciach na povrch Slnka, takže plochou tohto zdroja nie je celý stredový prierez Slnka, ale prierez s o niečo menšou plochou. Vzhľadom na veľkú vzdialenosť Slnka od Zeme ale nie je až takou chybou uvažovať celý stredový prierez.

Zaujíma nás najmenšia vzdialenosť listu od Zeme – taká, že list už na Zem nevrhá plný tieň, teda sa celý jeho plný tieň nachádza tesne nad jej povrchom. Túto konfiguráciu nám stačí zakresliť si do obrázku.

[1] ako sme mali aj na poslednom UFOPrask sústredení



Vzdialenosť h listu od Zeme si vieme vypočítať z podobnosti dvoch pravouhlých trojuholníkov so spoločným uhlom α. Vo väčšom z nich je preponou (priemerná) vzdialenosť l_{sz} stredu Slnka od povrchu Zeme, ktorej hodnotu si môžeme vyhľadať: $l_{sz} \approx 149\,600\,000$ km a kratšou odvesnou polomer Slnka $r_s \approx 695\,510$ km. Dĺžku jeho dlhšej odvesny vypočítame podľa Pytagorovej vety ako $\sqrt{l_{sz}^2 - r_s^2}$. V menšom z podobných trojuholníkov musia byť odvesny v rovnakom pomere, takže ak vieme, že jeho kratšou odvesnou je polovica listu A4 dĺžky $\frac{a}{2}$, kde a je rozmer papiera – uvažujeme ten najmenší z nich, teda kratšiu stranu $a = 0{,}21$ m – dlhšiu, ktorou je jeho výška h nad povrchom Zeme, vieme vypočítať.

$$\frac{h}{a/2} = \frac{\sqrt{l_{sz}^2 - r_s^2}}{r_s}$$

$$h = \frac{a\sqrt{l_{sz}^2 - r_s^2}}{2\,r_s} \approx \boxed{22{,}58 \text{ m}}$$

Teda na to, aby list A4 nevrhal na Zem plný tieň, stačí, aby bol aspoň vo výške 22,6 m nad povrchom Zeme, čo je v skutočnosti naozaj málo – stačí papier vyhodiť z okna nejakej vyššej poschodovej budovy.

2.2 Fúkať, fúkať chlapci

vzorák **Danko** a **Nina**, opravovali **Danko** a **Nina**

Ako príklad naznačuje, Čierna Brada zjavne dúfal, že keď do plachty fúkne, tak sa stane to isté, ako keď do nej fúkne vietor – potlačí plachtu aj s celou loďou dopredu. Prečo by to aj platiť nemalo? Určite, ak vietor naráža do plachty, tak sa časť jej kinetickej energie prenáša na plachtu a loď. No ale keď sa loď nehýbe dopredu aj napriek sile fúkania, tak asi musí byť nejaká sila, ktorá ju tlačí naspäť. A taká tam naozaj aj je.

Keď pirát fúka, tak ako on tlačí na vzduch smerom dopredu, rovnako aj vzduch tlačí na neho smerom dozadu. O tomto hovorí Newtonov tretí pohybový zákon - zákon akcie a reakcie. Presne hovorí to, že ak na seba pôsobia dva objekty, tak na seba pôsobia vzájomne rovnakou silou, len v opačných smeroch. To, čo pirát robí so vzduchom, si môžeme lepšie predstaviť s vodou. Určite sa vám už niekedy stalo, že ste nechali voľne položenú sprchovú hlavicu a zapli ste vodu. Vtedy sa aplikuje tento zákon, z ktorého vyplýva, že sa hlavica bude hýbať dozadu. Ďalším príkladom tohto javu je tryskový alebo raketový motor, ktorý vypúšťa plyn za seba, čo motor zrýchľuje v opačnom smere.

Vďaka zákonu akcie a reakcie sa teda loď takýmto spôsobom hýbať nebude, lebo sila fúkania pôsobiaca na plachtu je rovnaká ako sila, ktorou pirát pôsobí na vzduch, a teda rovnakou silou tlačí aj vzduch dozadu piráta, spolu s ktorým tlačí dozadu aj celú loď. A tieto dve sily pôsobiace na loď sa sčítajú na nulovú výslednú silu – teda loď sa nehýbe. Čierna Brada sa však môže poučiť z toho, ako funguje tryskový motor, a skúsiť ho napodobniť. Stačí, ak sa otočí smerom dozadu – od plachty. Potom, ak fúkne a rozpohybuje vzduch smerom dozadu, sa tým mierne odrazí smerom dopredu.

2.3 Neuveriteľný hluk

vzorák **Krtko**, opravoval **Krtko**

Existuje niekoľko metód, ktorými sa dá zmerať rýchlosť zvuku. Na niektoré postupy treba zložitú aparatúru (mikrofón, reproduktor a presné meranie času), na iné treba zase väčšiu znalosť toho, čo je to zvuk (napríklad, že je to vlnenie a to znamená, že vieme vytvoriť stojaté vlnenie a …). No vzhľadom na zložitosť týchto postupov sme sa rozhodli popísať vo vzorovom riešení najjednoduchší spôsob merania, aký nám napadol.

Na pokus samotný nám stačí meradlo dĺžky a meradlo času. A čo teda budeme robiť? Nájdeme čo najväčší plochý objekt v dostatočnej vzdialenosti – aspoň 100 m – mostný pilier je ideálny[2]. Tiež si treba dať pozor, aby v okolí neboli iné podobné objekty, od ktorých by sa mohol odrážať zvuk. Chceme totiž počuť ozvenu práve od nášho pilieru. Teraz budeme pískať[3] a počúvať ozvenu. Pochopiteľne si zapíšeme čas, ktorý zvuku trvalo, kým prekonal vzdialenosť ku stĺpu a nazad. Zapísané hodnoty spriemerujeme a vyrátame odchýlku. Mne vyšlo $t = 1{,}275 \pm 0{,}075$ s, teda relatívna odchýlka je $\delta t = 6$ %.

No a nakoniec, potom ako sme si párkrát[4] pískli a zapísali si, kedy sme počuli ozvenu, ešte musíme zmerať vzdialenosť medzi nami a našim objektom. Ja som využil to, že most je vyrobený z prefabrikovaných dielov, ktorých dĺžku som zmeral na $2{,}50 \pm 0{,}05$ m. Týchto blokov je na moste 66 s tým, že na začiatku je ešte jeden dlhší, ktorý má $3{,}0 \pm 0{,}5$ m. To nám dokopy dáva vzdialenosť $s = 168{,}00 \pm 0{,}33$ m, s relatívnou odchýlkou $\delta s = 0{,}2$ %.

Nakoniec ešte vyrátame hľadanú rýchlosť zvuku, a to tak, že vezmeme vzdialenosť, ktorú zvuk musel prejsť, a tú vydelíme časom, ktorý mu to trvalo.

$$v = \frac{2s}{t}$$

$$v = \frac{2168\ \mathrm{m}}{1{,}275\ \mathrm{s}}$$

$$v = 263\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Nesmieme zabudnúť na celkovú odchýlku, ktorú vypočítame ako súčet relatívnych odchýlok, $\delta v = \delta s + \delta t$.

$$\delta v = 0{,}2\ \% + 6\ \%$$

$$\delta v = 6{,}2\ \%$$

Vyšlo nám, že rýchlosť zvuku je $v = 263 \pm 17\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$[5]. To sa však celkom výrazne líši od štandardne udávanej rýchlosti zvuku, ktorá by pri teplote 12,5 °C, pri ktorej som pokus robil, mala byť $339{,}45\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Jedným z dôvodov pomerne veľkej chyby mohlo byť, že teplota vzduchu pri hladine mohla byť v skutočnosti iná. Hlavný dôvod by sme ale prikladali reakčnému času pri stláčaní stopiek. Skúsili sme totiž použiť aplikáciu na meranie reakčného času a

[2] pokiaľ nie je zaoblený

[3] dá sa aj kričať, ale chceme vytvoriť čo najkratší dobre počuteľný zvuk

[4] aspoň 5

[5] ak by vás zaujímalo, kde sa vzalo $\pm 17\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, tak to je zaokrúhlených 6,2 %

odmerali sme si reakčný čas 0,26 ± 0,02 s. Ak by sme tento čas odčítali od nameraných hodnôt, tak by nám vyšla rýchlosť zvuku $v = 341 \pm 33\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, s relatívnou chybou $\delta v = 9{,}6\ \%$, čo je teda výrazne lepší výsledok, aj keď meranie reakčného času nám prinieslo ďalšiu chybu, kvôli ktorej je celková relatívna chyba už takmer 10 %, čo už je celkom veľa.

2.4 KMS stanovačka

vzorák **Tomáš P.**, opravoval **Tomáš P.**

Na začiatok si vyhľadajme plochu vodnej nádrže, ktorá je $1\,700\,000\ \mathrm{m^2}$. Taktiež si vyhľadajme mernú tepelnú kapacitu vody, tá je $4180\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,°C}}$ a zo zadania si prepíšeme mernú tepelnú kapacitu človeka, ktorá je $3500\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,°C}}$. Ešte si odhadneme priemernú hmotnosť človeka – tú aproximujeme na 70 kg. Objem človeka si vieme vypočítať, keďže sme si už povedali hmotnosť človeka, s ktorou rátame a priemerná hustota človeka je $985\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}$. Objem je teda $0{,}071\ \mathrm{m^3}$. Ešte si dohľadáme celkový objem tejto nádrže, čo je okolo $15\,000\,000\ \mathrm{m^3}$.

Koľko ľudí?

Na to, aby sme zistili, koľko ľudí musí vôjsť do priehrady, použijeme kalorimetrickú rovnicu.

$$Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1)$$

Teplo, ktoré voda prijme sa musí rovnať teplu, ktoré odovzdajú ľudia. Ak si preto počet ľudí označíme ako x, dostaneme:

$$m_{voda} \cdot c_{voda} \cdot 0{,}01\ °\mathrm{C} = x \cdot (m_{clovek} \cdot c_{clovek} \cdot 4\ °\mathrm{C})$$

$$x = \frac{m_{voda} \cdot c_{voda} \cdot 0{,}01\ °\mathrm{C}}{m_{clovek} \cdot c_{clovek} \cdot 4\ °\mathrm{C}}$$

$$x = \frac{15\,000\,000\,000\ \mathrm{kg} \cdot 4180\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,°C}} \cdot 0{,}01\ °\mathrm{C}}{70\ \mathrm{kg} \cdot 3500\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,°C}} \cdot 4\ °\mathrm{C}}$$

$$x = \frac{627\,000\,000\,000\ \mathrm{J}}{980\,000\ \mathrm{J}}$$

$$x \approx 639\,796$$

Do priehrady teda musí vôjsť 639 796 ľudí, aby sa ohriala iba o 0,01 °C[6].

Čo sa stane s nádržou?

Do nádrže nám teraz vošlo 639 796 ľudí. Čo sa stane s priehradou? Vypočítajme si celkový objem ľudí, ktorí vošli do priehrady, a to by nám mohlo bližšie povedať, čo sa stalo. Teda celkový objem je $639796 \cdot 0{,}071\ \mathrm{m^3} = 45\,425{,}516\ \mathrm{m^3}$. Ak si tento objem rozložíme na celú plochu nádrže, zistíme, že sa hladina zvýši o $\frac{45\,425{,}516\ \mathrm{m^3}}{1\,700\,000\ \mathrm{m^2}} \approx 2{,}67$ cm, čo pretečenie priehradného múra určite nespôsobí.

2.5 Lúpež po slovensky

vzorák **Tomáš Š.**, opravoval **Tomáš Š.**

Pointa tohto javu nie je v ničom inom než vo fakte, že naša Zem sa otáča okolo svojej osi. Konkrétne Rím (a M&M, ktorý sa v Ríme nachádza) sa otáča väčšou rýchlosťou než Kodaň. Prečo je to tak?

[6] Kiežby UFO malo toľko riešiteľov…

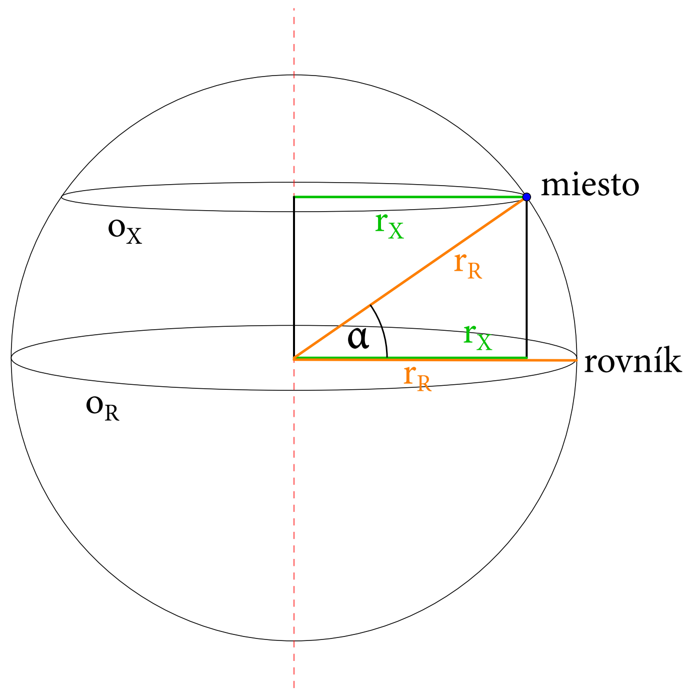
Celá zemeguľa sa okolo osi otáčania pohybuje rovnakou **uhlovou** rýchlosťou – 360° za deň. Toto platí aj pre všetky miesta na jej povrchu.

Každým miestom ale prechádza rovnobežka (kružnica) s iným polomerom a obvodom. Roviny, v ktorých sa tieto rovnobežky nachádzajú, sú kolmé na zemskú os. Všetky rovnobežky sú medzi sebou, naopak, rovnobežné. Najväčší z týchto kruhov je rovník, pri severnom či južnom póle sa kruhy zmenšujú.

Keďže každé miesto sa pohybuje tou istou *uhlovou* rýchlosťou, ale obvody kružníc sa líšia, líši sa aj skutočná **obvodová** rýchlosť pohybu týchto miest. Miesto na rovníku musí prekonať väčší obvod kružnice, aby sa za deň otočilo okolo osi o 360 stupňov, teda sa pohybuje rýchlejšie. Naopak, severný a južný pól pretína os otáčania, teda tieto miesta sa za celý deň vplyvom otáčania Zeme pohnú len minimálne („vôbec“).

$v_R = \frac{2\pi \cdot 6371\ \mathrm{km}}{24\ \mathrm{h}} = 463{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ je rýchlosť otáčania na rovníku. Vypočítali sme ju ako obvod rovníka delený počtom sekúnd v dni.

Nás ale zaujíma, akou rýchlosťou sa hýbe **Rím** po svojej geografickej rovnobežke. Treba zistiť, aký je jej obvod. To zistíme tak, že spočítame jej polomer.



Obrázok 2: *Geometrický obraz situácie.*

V geometrickom obraze celej situácie nájdeme pravouhlý trojuholník, ktorého prepona je rovná polomeru Zeme (čo je aj polomer rovníka – najväčšej rovnobežky – na obrázku r_R), a ktorého odvesna je rovná hľadanému polomeru r_X. Zistíme, že uhol vyjadrujúci geografickú šírku (ak ste náhodou zabudli, geografická šírka sa vyjadruje práve v uhle) je uhol pri odvesne r_X. Preto vieme vyjadriť r_X ako $r_R \cos(\alpha)$, kde α je geografická šírka.

Keď vidíme, že polomer v danom mieste sa rovná $r_R \cdot \cos(\alpha)$, vieme si odvodiť, že obvod danej rovnobežky sa bude rovnať $o_R \cdot \cos(\alpha)$. Keďže rýchlosť, ktorou sa daný bod musí otáčať, je zase priamo úmerná k obvodu, rýchlosť otáčania v danom bode sa rovná $v_R \cdot \cos(\alpha)$.

Rýchlosť otáčania **v Ríme** je teda $v_R \cdot \cos(41{,}9°) = 344{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ a **v Kodani** $v_R \cdot \cos(55{,}67°) = 261{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

M&M sa teda teleportuje do Kodane pohybujúc sa v kruhovom pohybe okolo zemskej osi rýchlosťou o $83{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ väčšou než samotná Kodaň, čo má za následok jeho náraz do najbližšej steny v smere otáčania Zeme. V kilometroch za hodinu je to rýchlosťou $302\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

To nie je ešte úplne všetko: Rím a Kodaň majú skoro rovnakú geografickú **dĺžku**, takže tento druhý efekt nie je badateľný, ale ak by sme mali dve mestá, ktoré sa aj v tejto súradnici výrazne líšia, museli by sme zarátať aj to, že vektor rýchlosti, ktorý je v jednom meste kolmý na povrch Zeme, by v druhom smeroval do podlahy alebo do stropu. M&M by okrem pohybu smerom k stene zažil aj pohyb nahor (prípadný náraz do stropu) alebo nadol (náraz do podlahy).[7]

[7] Ak máte problém predstaviť si niečo z tohto vzoráku, nakreslite si to. Naozaj to pomáha.