

Vzorové riešenia 3. kola zimnej časti 2015/2016

3.1 Atmosféra (opravoval Baklažán, vzorák Jimi)

Akú veľkú záťaž nosíme na pleciah, keď musíme uniesť celú atmosféru nad nami? Ako to, že dokážeme uniesť takúto obrovskú záťaž, no činku s rovnakou hmotnosťou by sme neunesli?

Najprv sa pozrime koľko je vlastne ten atmosferický tlak. Rýchle vyhľadávanie ukazuje, že je to približne 100 kPa. To znie ako veľa. Koľko teda nosíme na pleciah? Najprv musíme vedieť, aké veľké máme plecia. Poďme teda odhadovať. Na šírku majú povedzme pol metra, na hrúbku tak 10 cm. Spolu teda $0.5 \cdot 0.1 = 0,05 \text{ m}^2$. Vynásobíme túto plochu tlakom a dostaneme silu $F = 100\,000 \text{ Pa} \cdot 0,05 \text{ m}^2 = 5000 \text{ N}$, čo korešponduje päťstokilogramovému závažiu. To je veľmi veľa, keď zvážime že vzpieračské rekordy v najvyšších hmotnostných kategóriách sa pohybujú okolo 250 kg. Ako to že toľko veľa unesieme na chrbte?

Činky, na rozdiel od atmosféry, na nás tlačia *iba smerom nadol*. Ale vzduch na nás pôsobí atmosferickým tlakom *zo všetkých strán rovnako* - zhora, zdola, aj z bokov. V praxi to znamená napríklad toto: na predpaženú ruku síce pôsobí atmosféra obrovskou silou zhora, ale rovnakou ju aj zdola podopiera. Teda nemáme ťažkosti udržať ruku predpaženú. Ak by sme v tej ruke ale držali činku, museli by sme ju udržiavať svojím telom (svalmi, kosťami, kĺbmi). Inými slovami, atmosféra nás *stláča*, ale netlačí žiadnym smerom¹. Ostáva už len otázka: prečo nám takéto stláčanie neprekáža?

Naše telá sú stavané tak, aby zvnútra kompenzovali vonkajší tlak. Naše pľúca, žalúdok aj svaly pracujú pri 100 kPa. Preto rovnako ako na pleciah pôsobí zvonka tlak 100 kPa, tak aj zvnútra. Ale ako to, že ho necítíme? Znovu je tu rovnaká odpoveď: Lebo ľudia sú tak stavaní. Čo by sa naozaj stalo, ak by sme atmosféru zobrali? Viacero problémov, ale neexplodovali by sme. Ako to vieme? Lebo jednému astronautovi sa to už stalo! V roku 1966 bol Jim LeBlanc vystavený vákuu na niekoľko sekúnd... a prežil! Prečo? Lebo koža nás dokáže udržať pohromade.

3.2 Romantika pri západe (opravovali Marek M. a Marcel P., vzorák Marek M.)

Malý princ sa rád pozerá na západy slnka². Keďže planéta³, na ktorej žije, je veľmi malá, môže si pozrieť aj viac západov slnka za jeden deň. Robí to nasledovne: na začiatku si sadne niekam na

¹V skutočnosti nás dokonca mierne nadnáša Archimedovskou vztlakovou silou, pretože tlak klesá s výškou. Skúste si túto silu vypočítať!

²V skutočnosti ide o hviezdu A427, ale znelo by čudne, keby hovoril, že sa rád pozerá na západ A427.

³V skutočnosti ide o asteroid B612.

Generálny partner



Partneri



Mediálny partner



GRATEX
INTERNATIONAL

rovník tak, aby videl celé slnko tesne nad obzorom. Sediac na mieste potom sleduje zapadajúce slnko, až kým úplne celé nezmizne pod obzorom. Potom si posunie stoličku o kúsok na západ tak, aby slnko opäť videl tesne nad obzorom a znova si vychutná jeho západ. Tento postup opakuje až do omrzenia. Koľko najviac celých západov slnka môže Malý princ takýmto spôsobom uvidieť za jeden deň?⁴ Planéta Malého princa je guľa s polomerom $R_p = 5 \text{ m}$ a obieha okolo slnka s polomerom $R_s = 4\,000\,000 \text{ km}$ po kružnici s polomerom $r = 100\,000\,000 \text{ km}$. Os planéty je kolmá na rovinu obehu planéty a jeden deň na planéte trvá $t = 17 \text{ h}$.

Existencia dňa, je spôsobená rotáciou planéty Malého princa. A tým, že planéta rotuje, tak máme možnosť pozorovať pohyb slnka nad planétou, ba dokonca, aj keď za ňu zachádza. Západ slnka je nič iné, ako čas od dotyku „spodného“ okraja slnka a horizontu až po kým sa horizontu nedotkne horný „okraj“. Otázkou teda je, koľko takýchto západov stihne Malý princ za 17 h. Keďže planéta je malá a princovi trvá presadnúť si veľmi krátko vzhľadom na rotáciu planéty tak môžeme povedať, že na presunoch počet západov nezávisí.

Zavedieme si veličinu uhlový priemer ktorá bude udávať pod akým veľkým uhlom objekt vidíme.⁵ V našom prípade objekt je slnko. Vieme, že slnko bude opisovať kružnicu, ak by sme sedeli na jednom mieste (pozorovateľ je na rovníku). Keď budeme vedieť pod akým uhlom pozorujeme slnko tak budeme vedieť aj koľko slnk by sme vedeli dať na spomínanú kružnicu aby sa dotýkali. Teda uhol vyriešime pomocou goniometrickej funkcie sínus. A použijeme trojuholník Malý Princ, ďalej P , Stred slnka, ďalej S a bod dotyku, ďalej B . Bod dotyku je bod ktorý pozorujeme na hrane slnka a vesmíru. Vieme, že vzdialenosť $|SP|$ je $1 \cdot 10^8 \text{ km}$. A vieme, že vzdialenosť $|SB|$ je $4 \cdot 10^6 \text{ km}$ a taktiež vieme, že uhol $\angle PBS$ je pravý, dotyčnica vždy zvierá pravý uhol so spojnicou bodu dotyku a stredu. Z toho máme:

$$\sin(\alpha) = \frac{|SB|}{|SP|} = \frac{4}{100} \Rightarrow \alpha \doteq 2,29^\circ.$$

Teraz sa zamyslíme a zistíme, že toto je len uhlový polomer, takže priemer je jednoducho $\beta = 2\alpha \doteq 4,58^\circ$.

Ďalšou veličinou je uhlová rýchlosť, čo je uhol prejdený za čas. Planéta Malého princa sa zjavne točí uhlovou rýchlosťou $\omega = \frac{360^\circ}{T}$. My chceme ale teraz zistiť, koľko trvá jeden západ slnka, t.j. za aký čas sa planéta otočí o uhol β .

Toto sa dá vyriešiť buď trojčlenkou alebo faktom, že uhlová rýchlosť je v oboch prípadoch rovnaká:

$$\omega = \frac{360^\circ}{T} = \frac{\beta}{t}.$$

kde t je čas jedného západu. Z toho, alebo spoomínanou trojčlenkou získame čas západu slnka ako

$$t = \beta \cdot \frac{T}{360^\circ}.$$

Počet možných západov už zistíme tak, že dĺžku dňa predelíme dĺžkou jedného západu slnka:

$$n = \frac{T}{t} = \frac{T}{\beta \cdot \frac{T}{360^\circ}} = \frac{360^\circ}{\beta} \doteq 78,5.$$

⁴Deň môžeme definovať ako čas medzi dvoma po sebe idúcimi východmi slnka z pohľadu pevného bodu na planéte Malého princa.

⁵Uhol, ktorý zvierajú spojnice nášho oka a okrajov objektu.

Môžeme zvoliť aj iný prístup. Keďže sa pýtame koľko západov vidíme za deň a deň je definovaný ako čas za ktorý sa planéta otočí o 360° , tak nám stačí zistiť, koľko slnk zmestíme do svojho celého zorného uhla. Vidíme, že dostávame to isté:

$$\frac{360^\circ}{4,584^\circ} = 78,5.$$

Teda Malý Princ na B612 môže pozorovať maximálne 78 západov A427 za deň.

3.3 Experimentálna (opravovali Katka K. a Kubo H., vzorák Baklažán)

Mareka vždy zaujímalo, ako závisí čas výtoku vody z valcovej fľaše v závislosti od toho, ako hlboko pod hladinou sa nachádza výtok. Zoberte si preto kružidlo a pomocou neho urobte dostatočne veľkú dierku (niekoľko milimetrov) do nejakej vhodnej (skoro) valcovovej fľaše a odmerajte, ako závisí čas výtoku vody z fľaše v závislosti od výšky hladiny. Presnejšie, odmerajte čas, za ktorý klesne hladina vody do výšky 1 cm nad dierou. Meranie urobte aspoň pre 10 rôznych výšok.

Tento experiment bol pomerne priamočiary. Ako nám hovorí zadanie, zobrali sme si fľašu a urobili sme do nej dieru. My sme používali fľašu, ktorá mala dosť veľkú časť približne valcového tvaru a na spodku tejto časti sme do fľaše urobili dieru s priemerom asi 4 mm. Následne bolo dobré urobiť si na fľaši nejaké značky, pomocou ktorých budeme kontrolovať výšku hladiny. My sme to urobili tak, že sme na ňu nalepili zvislý pásik papiera, na ktorý sme si predtým narysovali centimetrové dieliky – najnižší dielik bol v rovnakej výške ako diera, najvyšší bol 11 cm nad dierou.

V tomto okamihu sa už môžeme pustiť do samotného merania. Nalejeme do fľaše vodu po nejakú značku, spustíme stopky a počkáme, kým hladina klesne na značku 1 cm nad dierou. Vtedy stopky zastavíme a čas si zapíšeme. Keďže naliať vodu presne po nejakú značku je dosť náročné, my sme si to zjednodušili tak, že sme jej do fľaše naliali o trochu viac a nadbytočnú vodu sme nechali odtiecť dierou. Ďalší trik, ktorým sa dalo zjednodušiť meranie, bolo nenalievať vodu do fľaše pre každú výšku hladiny zvlášť, ale odmerať čas výtoku pre všetky vyznačené výšky naraz: nalejeme vodu po najvyššiu značku, spustíme stopky a vždy, keď je hladina vody na niektorej značke, zaznamenáme si čas, ktorý práve ukazujú stopky, bez toho, aby sme ich zastavili.⁶ Na konci pre každú značku odpočítame čas, v ktorom bola hladina na danej značke od času, v ktorom hladina prišla na značku 1 cm nad dierou. Tým zistíme, ako dlho hladina klesala z tejto značky.

Ako pri všetkých experimentoch, meranie je dobré zopakovať viackrát. A to hneď z dvoch dôvodov:

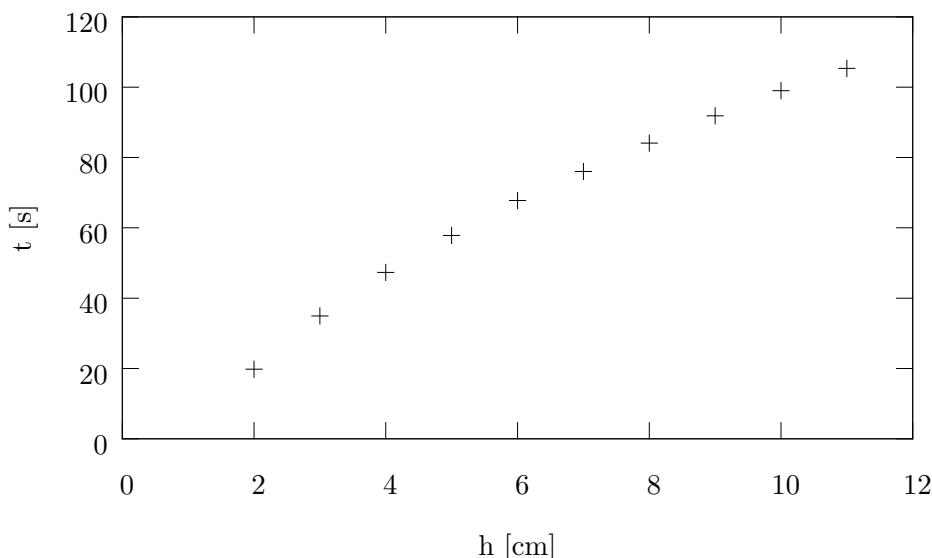
- (i) Keď spriemerujeme hodnoty namerané vo viacerých meraniach, dostaneme hodnotu, ktorá bude pravdepodobne bližšia realite, než hodnota nameraná v jednom meraní.
- (ii) Z toho, ako veľmi sa namerané hodnoty navzájom líšia, vieme niečo povedať o presnosti nášho merania – ak sa líšia veľmi, naše meranie bolo veľmi nepresné, ak sa nelíšia skoro vôbec, naše meranie bolo pravdepodobne veľmi presné.

⁶Niektoré stopky majú funkciu, ktorá vám umožňuje zaznamenať aktuálny čas bez toho, aby ste ich museli zastaviť. Takéto stopky sme použili aj my.

My sme meranie zopakovali trikrát. V tabuľke uvádzame v druhom riadku priemerné namerané hodnoty. V treťom riadku uvádzame, o koľko sa skutočné namerané hodnoty v priemere líšili od tých priemerných.

$h[\text{cm}]$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$t[\text{s}]$	19,80	34,96	47,32	57,85	67,79	76,03	84,12	91,88	99,02	105,37
$\Delta t[\text{s}]$	0,44	0,45	0,19	0,26	0,46	0,19	0,53	0,34	0,30	0,36

Aby sme lepšie videli, čo sme to namerali, namerané hodnoty vynesieme do grafu:



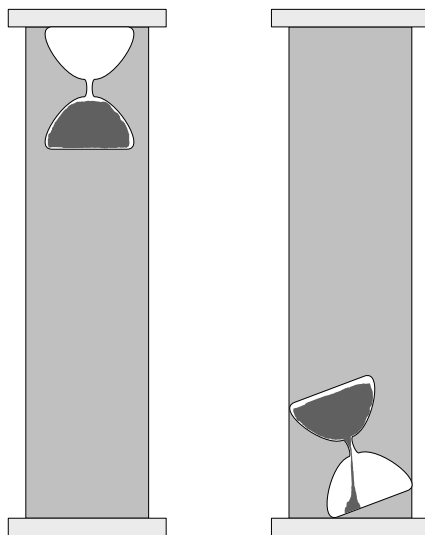
Obr. 1: Závislosť času výtoku od výšky hladiny

Ako môžeme vidieť, čím vyššie bola hladina na začiatku, tým dlhšie vode trvalo vytiecť (to nie je nič prekvapivé – viac vody potrebuje dlhší čas na vytečenie). Zaujímavejšie je, že s rastúcou výškou hladiny rástol čas výtoku čoraz pomalšie (teda že rozdiel medzi časmi výtoku z výšky 11 cm a 10 cm je omnoho menší než rozdiel medzi časmi výtoku z 3 cm a 2 cm). To vlastne znamená, že keď je hladina vyššie, voda dierou vyteká rýchlejšie. Čo dáva zmysel, keďže vtedy na vodu tečúcu dierou pôsobí väčší hydrostatický tlak, ktorý ju vytláča von. Keby sme to spočítali teoreticky, vyšlo by nám, že čas potrebný na vytečenie vody by mal byť priamo úmerný odmocnine z výšky hladiny nad dierou, čo v našich meraniach zhruba sedí.

Nakoniec je dobrým zvykom zamyslieť sa, aké nepresné bolo naše meranie a čo bol hlavný dôvod nepresnosti. Jeden z dôvodov našej nepresnosti bola nepresnosť použitých stopiek, ktoré merali s presnosťou na stotiny sekundy. Táto nepresnosť je však úplne zanedbateľná oproti nepresnosti spôsobenej tým, že stopky spúšťal a zastavoval človek, keďže reakčný čas človeka je zhruba 0,2 s. Naše namerané hodnoty sa však od priemernej líšili niekedy aj o viac než pol sekundy (čo je podstatne viac než reakčný čas), teda tam musel byť ešte nejaký iný dôvod. Tým bolo pravdepodobne to, že značky na fľaši mali svoju hrúbku a nedalo sa úplne presne povedať, kedy hladina dosiahla značku. Keďže hladina klesala pomerne pomaly, mohla hrúbka čiar spôsobiť aj polsekundovú nepresnosť.

3.4 Vodné presýpacie hodiny (opravoval Enka a Pizza, vzorák Enka)

Maťo sa naposledy hral so zaujímavou fyzikálnou hračkou. Tá pozostáva z presýpacích hodín, ktoré sú umiestnené v tenkej úzkej nádobe s vodou (pozri obrázok 2). Maťo hračku otočil hore nohami, no presýpacie hodiny už nevyplávali nahor, namiesto toho zostali nakrivo pri dne. Zuzka Maťovi povedala, že napriek tomu, že hmotnosť ani objem presýpacích hodín sa nezmenia, tak presýpacie hodiny môžu zostať dole, tak ako je to naznačené na obrázku. Môže takáto situácia nastať? Vedeli by ste vysvetliť ako a prečo takáto situácia nastane?



Obr. 2: Presýpacie hodiny. Na ľavom obrázku pred prevrátením a na pravom obrázku po prevrátení.

Na úvod sa zamyslime, prečo nám naša intuícia hovorí, že presýpacie hodiny by mali stúpať nahor. Na prvom obrázku „niečo“ drží hodiny pri stropu. Ak hračku pretočíme, tak predpokladáme, že znova „niečo“ vytlačí hodiny k stropu. Áno, uhádli ste. To „niečo“ je vztlaková sila.

Archimedov zákon nám hovorí, že teleso ponorené do kvapaliny je nadľahčované vztlakovou silou. Jej veľkosť je

$$F_{vz} = \rho_k V g$$

pričom ρ_k je hustota kvapaliny a V objem ponorenej časti telesa. V našom prípade sú hodiny celým objemom ponorené do vody. Teda výsledná sila pôsobiaca na hodiny je rovná rozdielu tiažovej a vztlakovej sily.

$$\begin{aligned} F &= F_{vz} - F_g, \\ F &= \rho_k V g - \rho V g, \\ F &= (\rho_k - \rho) V g. \end{aligned}$$

Hmotnosť, ani objem hodín sa nezmenili. Teda ani celková hustota a následne ani celková vztlaková sila sa nemohla zmeniť. Rovnako ako na prvom obrázku, tak aj na druhom by mala vztlaková sila tlačiť hodiny k stropu.

Čo sa však po obrátení hračky zmenilo? Hodiny sú z nejakého dôvodu nakrivo. Tak-
tiež oblasť so vzduchom je teraz pod pieskom. A to je kľúč k problému! Vztlačková sila,
pôsobiacia na obe časti hodín, je síce rovnaká, ale vzduch má menšiu hustotu ako piesok
a teda naň pôsobí menšia tiažová sila. Oblasť so vzduchom je viac ťahaná nahor, ako
oblasť s pieskom. Hodiny sa preto chcú pretočiť, ale stena hračky im to nedovolí. Trenie
medzi stenou hračky a hodinami spôsobí, že hodiny ostanú pri dne, až kým sa časť piesku
nepresype. Potom sa hodiny prestanú dotýkať steny a vyplávajú k stropu.

3.5 Hodnoty a vízie (opravoval Dušan a Kika H., vzorák Filip)

Samo si rozhodol postaviť nový biznis plán na dotovaných cenách elektrickej energie pochádzajúcich
z obnoviteľných zdrojov. Jeho nápad spočíva v tom, že si do odkvapu dal namontovať malé dynamo,
ktoré premieňa potenciálnu energiu dažďovej vody, ktorá dopadne na jeho strechu, na elektrickú
energiiu. Skúste odhadnúť, koľko za rok zarobí za každý meter štvorcový strechy jeho domu. Neza-
budnite, že množstvo zrážok závisí aj od zemepisnej polohy domu, urobte preto aj odhad pre najlepší
a najhorší možný prípad na Slovensku.

*Prší, prší, len sa leje, Samko v okne eurá berie. Milá má, duša má, zrátaj výkon
dynama.*

Po tejto kultúrnej vložke poďme rátať. Ako Samko zarába? Kinetická energia dopa-
dajúcich kvapiek je síce nezanedbateľná, no nevieme ju technicky jednoducho zachytiť a
tak ju nebudeme uvažovať.

Po dopade kvapka pomaly stečie po streche do ríny⁷. Ani túto (potenciálnu) energiu
nevyužívame, stráca sa trením o strechu. Môžeme však aspoň optimalizovať výšku h ,
v ktorej zachytíme stekajúcu vodu do ríny. Čím vyššie, tým lepšie.

Ideálne môžeme na streche použiť viac rín v rôznych výškach vedúcich do zvodných
rúr⁸. Každá rína a jej zvodná rúra môže mať rôznu výšku a teda sme (pre typickú strechu
tvaru $\wedge$) schopní v priemere zachytávať dažďovú vodu v polovici výšky strechy. Vzhľadom
na technické, finančné a estetické komplikácie je však rozumné sa uskromniť s jednou
rínou na spodnom okraji strechy.

Zvodné rúry ústia do turbíny. V zvodnej rúre vznikne vodný stĺpec výšky h , ktorý
bude roztáčať turbínu a tá už môže generovať elektrinu. Potenciálnu energiu, ktorú môže
odovzdať kvapka pri prechode turbínou, vieme vyrátať zo vzťahu $\Delta E = \Delta mgh$. Hoci
moderné veľké vodné turbíny pracujú s účinnosťou $\eta \doteq 95\%$, Samko sa bude musieť
uspokojiť s menšou – dajme tomu $\eta = 60\%$.

Takýmto spôsobom každý meter štvorcový strechy⁹ vyrobí ročne $E = \eta mgh$ elektrickej
energie, kde m je celková hmotnosť zachyteného dažďa v priebehu roka na 1 m^2 . Hmotnosť
vyrátame ako výšku ročných zrážok l vynásobenú plochou $S = 1 \text{ m}^2$ a hustotou vody ρ .

Zisk už ľahko dopočítame z výkupných cien elektrickej energie z vodnej elektriny – pri-
bližne $0,11 \text{ €/kWh} = 3,10 \cdot 10^{-8} \text{ €/J}$. Nasledujúca tabuľka ukazuje výsledky pre vybrané
budovy.

⁷Alebo odkvapu.

⁸To nie je kompliment.

⁹V pôdoryse, čiže priemet strechy do horizontálnej roviny.

názov	$h[\text{m}]$	$l[\text{mm}]$	$E[\text{kJ}/\text{m}^2]$	zisk $[\text{€}/\text{m}^2]$
jednopodlažný dom, Senec	3	480	8,5	0,000 25
drevenica, Orava	5	1200	35	0,001
Zbojnická chata, Tatry	6	2100	74	0,002
12 poschodový panelák, Petržalka	36	740	160	0,005
Burj Khalifa, Dubaj	830	95	460	0,014
kópia Burj Khalifa ¹⁰ , India	830	12 000	60 000	1,8

Tab. 1: Zisk a energie získané za rok.

Samkov biznis plán by sa mal teda uberať smerom do Indie, kde by po postavení navyššej stavby sveta dokázal zarábať ročne 1,8 € z každého metra štvorcového! Peniaze sa mu budú priam sypať z neba!

¹⁰Postavená v Mawsynram-e.