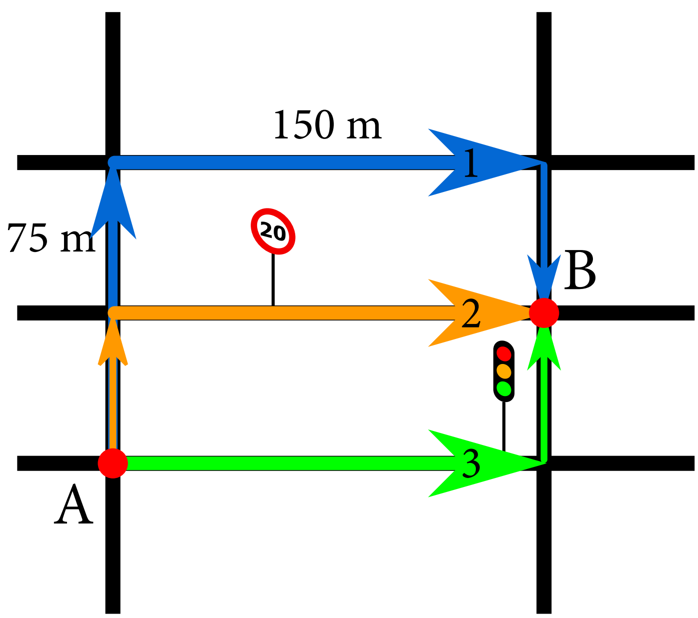
Riešenia 3. kola zimnej časti

3.1 Stratený v New Yorku

vzorák **Tomáš P.**, opravoval **Tomáš P.**

Začnime tým, že si premeníme míle za hodinu na metre za sekundu, keďže naše vzdialenosti sú v metroch a čas nepresiahne viac ako minútu. 1 mph je 0,447 $\frac{m}{s}$, teda 40 mph bude 17,88 $\frac{m}{s}$.



Obrázok 1: *Vyznačenie možných ciest.*

Poďme postupne a rozoberme si najprv prvý prípad. Dráha s = 375 m a celý čas ideme rýchlosťou 40 mph čo už vieme, že je 17,88 $\frac{m}{s}$.

Teraz si rozoberme druhú cestu, ideme 75 m rýchlosťou 40 mph a potom ideme 150 m rýchlosťou 20 mph. Keďže tento úsek ideme dvakrát pomalšie, tak môžeme uvažovať že za rovnaký čas prejdeme dvakrát väčšiu dráhu. Teda môžeme povedať že prejsť druhú cestu nám bude trvať rovnako dlho ako prejsť 375 m cesty rýchlosťou 40 mph. A tu si môžeme všimnúť že v druhej ceste máme prejsť rovnakú vzdialenosť rovnakou rýchlosťou a preto bude čas cesty rovnaký.

Tretia cesta je dlhá 225 m a ešte nás zbrzdí semafor, na ktorom si počkáme 9 s. Teraz si poďme spočítať čas za ktorý prejdeme prvú cestu[1] a čas, za ktorý prejdeme tretiu cestu. Použijeme na to základný vzorec pre rovnomerný pohyb

[1] a zároveň druhú

$v = \frac{s}{t}$ z ktorého si vyjadríme čas:

$$v = \frac{s}{t} \qquad / \cdot t$$

$$v \cdot t = s \qquad / : v$$

$$t = \frac{s}{v}$$

Teraz si dosaďme do vzorca hodnoty. Keďže poznáme aj s aj v tak vypočítať čas bude jednoduché.

Pre 1. a 2. cestu:

$$t = \frac{s}{v}$$

$$t = \frac{375\ \mathrm{m}}{17{,}88\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

$$t = 21\ \mathrm{s}$$

Pre 3. cestu:

$$t = \frac{s}{v} + 9\ \mathrm{s}$$

$$t = \frac{225\ \mathrm{m}}{17{,}88\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} + 9\ \mathrm{s}$$

$$t = 12{,}6\ \mathrm{s} + 9\ \mathrm{s}$$

$$t = 21{,}6\ \mathrm{s}$$

Najrýchlejšie sú teda cesty 1 a 2, no ich využitím v priemere ušetríme iba 0,6 s. V niektorých prípadoch keď chytíme dobrý semafor tak je cesta cezeň výhodnejšia, no tento risk sa nie vždy vyplatí.

Bonus za čokoládu: V bonuse nestačilo skonštatovať, že keďže cesta cez semafor je už teraz najdlhšia, tak keď predĺžime priemerné státie na semafore, tak to stále bude pomalšia cesta. Očakávali sme od Vás podrobnejšiu analýzu prípadu tohto semaforu.

Prvá vec, čo si vypočítame, je ako dlho mu budú trvať krajné prípady cesty. Keby trafil presne zelenú a vôbec nestál na červenej, tak mu cesta trvá 12,6 s. Ak by prišiel na križovatku presne v momente, kedy zasvieti červená, tak by mu táto cesta trvala 52,6 s, čo je o dosť viac ako akákoľvek iná cesta. Teda prejsť túto cestu mu v priemere trvá 32,6 s, čo je viac ako všetky cesty z pôvodnej úlohy. Kedy by sa Michalovi oplatilo ísť touto cestou? Rýchlejšie by touto cestou prešiel, len ak by stihol prísť niekedy počas 20 s zelenej, a teda nestál na semafore, alebo niekedy počas posledných 8,4 s červenej, keďže 8,4 s je čas, ktorý ušetrí oproti 1. a 2. ceste ak trafí zelenú a teda je to aj čas, ktorý sa môže maximálne zdržať státím na semafore. No s akou pravdepodobnosťou môže stihnúť tieto časy? Celý jeden cyklus semaforu trvá 60 s a v každom cykle semafora je presne 28,4 s, počas ktorých sa nám oplatí prejsť touto cestou. Teda Michal má šancu 28.4 : 60, teda $\frac{284}{600} = \frac{71}{150} = 47{,}3\ \%$, že ak sa vydá touto cestou, tak trafí semafor v správnom čase. Michal má teda menej ako polovičnú šancu na to, že táto cesta pre neho bude rýchlejšia ako ostatné. S takouto pravdepodobnosťou by sa stále mal držať ciest 1 a 2 zo zadania.

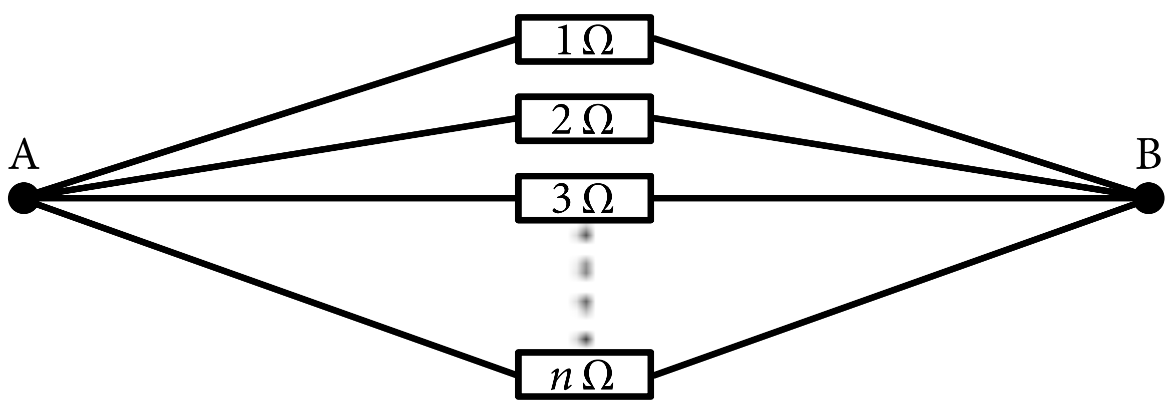
3.2 Odporová postupnosť

vzorák **Lukáš G.**, opravoval **Lukáš G.**

Na začiatok sa zamyslime nad tým, čo predstavuje pojem dĺžkový odpor. Ak máme kábel z nejakého materiálu, tak pretekajúcemu prúdu tento materiál kladie nejaký odpor. Preto čím dlhší je kábel, tým väčší odpor kladie tento kábel pretekajúcemu prúdu. Veličina dĺžkový odpor nám popisuje, aký odpor pretekajúcemu prúdu kladie tento kábel na každý jeden meter svojej dĺžky. To ale znamená, že ak máme päťmetrový kábel, tak pretekajúcemu prúdu kladie päťkrát väčší odpor ako kábel dlhý meter.

Aký odpor kladú pretekajúcemu prúdu Krtkove káble?

Keďže dĺžkový odpor Krtkovho kábla je $1\,\frac{\Omega}{\mathrm{m}}$, každý meter jeho kábla kladie prúdu odpor $1\,\Omega$. Krtko si svoje káble rozstrihal na kúsky dlhé $1, 2, 3, \dots, n$ metrov, čiže tieto kúsky budú pretekajúcemu prúdu klásť odpor postupne $1, 2, 3, \dots, n$ ohmov. To si ale vieme predstaviť aj tak, že namiesto káblov s odporom $1, 2, 3, \dots, n$ ohmov máme rezistory s rovnakými hodnotami odporu, ktoré sú dokonale vodivými drôtmi prepojené s bodom A aj bodom B, čo môžeme vidieť na nasledujúcom obrázku:



Obrázok 2: *Takto vyzerá Krtkov obvod.*

Čo s tým teraz?

Máme už predstavu, ako vyzerá Krtkov obvod, pričom v ňom máme zapojené iba rezistory, a chceme zistiť celkový odpor. [2] Bystrým okom fyzika si môžeme všimnúť, že náš obvod nie je nič iné ako paralelné zapojenie n rezistorov v n vetvách. Na výpočet celkového odporu v paralelnom zapojení s n vetvami však poznáme nasledovný vzorec:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n},$$

[2] Ak ste sa ešte elektrine v škole nevenovali a s takýmto typom úloh ste sa nestretli, odporúčame vám pozrieť si našu UFOčebnicu.

kde R je celkový odpor obvodu a $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n$ sú odpory jednotlivých vetiev. Zo zadania máme podmienku $R \geq \frac{1}{\pi}$. To ale vieme prepísať na $\frac{1}{R} \leq \pi$. Potom ale musí na základe vyššie uvedeného vzorca platiť:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n} \leq \pi.$$

Teraz už len zostáva dosadiť jednotlivé hodnoty odporov, o ktorých vieme, že sú postupne $1, 2, 3, \ldots, n$ ohmov:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \pi.$$

Pozrime sa na približné hodnoty ľavej strany[3] pre prvých niekoľko n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
ľavá s. ≐	1	1,5	1,83	2,08	2,28	2,45	2,59	2,72	2,83	2,93	3,02	3,10	3,18

Vidíme, že najväčšie n, pre ktoré je ľavá strana najviac π, je číslo 12. Pre čísla väčšie ako trinásť bude hodnota ľavej strany určite väčšia ako 3,18, lebo k už hotovému súčtu prevrátených hodnôt čísel 1 až 13 pripočítame ďalšie čísla.

Bonus za čokoládu

Predstavme si, že by Krtko mal ešte jeden rovnako dlhý kábel ako na začiatku a tiež by ho rozstrihal na kúsky dĺžky $1, 2, 3, \ldots, n$ metrov. Keď potom zoberie najkratší z pôvodných káblov (ktorý má dĺžku 1 meter) a najdlhší z týchto nových káblov (ktorý má dĺžku n metrov), zistíme, že majú dokopy dĺžku $n + 1$ metrov. Ak by tento postup zopakoval, najkratší z pôvodných káblov s dĺžkou 2 metre a najdlhší z nových káblov s dĺžkou $n - 1$ metrov dajú dokopy opäť $n + 1$ metrov. Takto vieme pokračovať až dovtedy, kým káble rozdelíme do n dvojíc, pričom káble v každej dvojici majú dokopy dĺžku $n + 1$ metrov. Celková dĺžka všetkých káblov je preto $n(n + 1)$. Keďže sme si ale pridali ešte jeden pomocný kábel s rovnakou dĺžkou, akú mal kábel pôvodný, bude dĺžka pôvodného kábla polovica, čiže $\frac{1}{2}n(n + 1)$. Pre $n = 12$ vychádza dĺžka kábla 78 metrov.

3.3 Hophopka či hopsalka?

vzorák **Benjamin**, opravoval **Krtko**

Návrh postupu

Návrh postupu merania mal pozostávať z 3 častí: Ako ohrievať gumenú loptičku, Ako zmerať jej teplotu a Ako zmerať výšku odrazu.

Ako ohrievať gumenú loptičku

Loptička sa nemohla ohrievať kontaktne lebo by sa deformovala, preto vhodný spôsob je napríklad vodný alebo olejový kúpeľ. To znamená, že na nejaký ohrievač položíme nádobu s vodou alebo olejom (v tomto prípade bola voda lepšia voľba) a loptičku doňho vložíme. Keďže guma je dobrý tepelný izolant, tak teplo, ktoré sme dodali vode sa hneď neprenesie na loptičku preto bolo potrebné ohriať vodu na vyššiu teplotu a potom počkať kým klesla na nami požadovanú teplotu.

[3] táto hodnota sa nazýva n-té harmonické číslo a označuje sa H_n

Ako zmerať jej teplotu

Pri meraní teploty bolo potrebné si dávať pozor, aby sme nemerali teplotu vody, ale teplotu loptičky. Preto by mohlo niekoho napadnúť zapichnúť teplomer do loptičky, čo však vedie k jej postupnému zničeniu, takže by sme nedostali relevantné výsledky. Preto bolo potrebné napríklad postupovať tak, ako je napísané o odstavec vyššie, a počkať, kým sa vyrovná teplota vody a loptičky. Budeme síce merať teplotu vody, ale tá bude rovnaká ako teplota loptičky.

Ako zmerať výšku odrazu

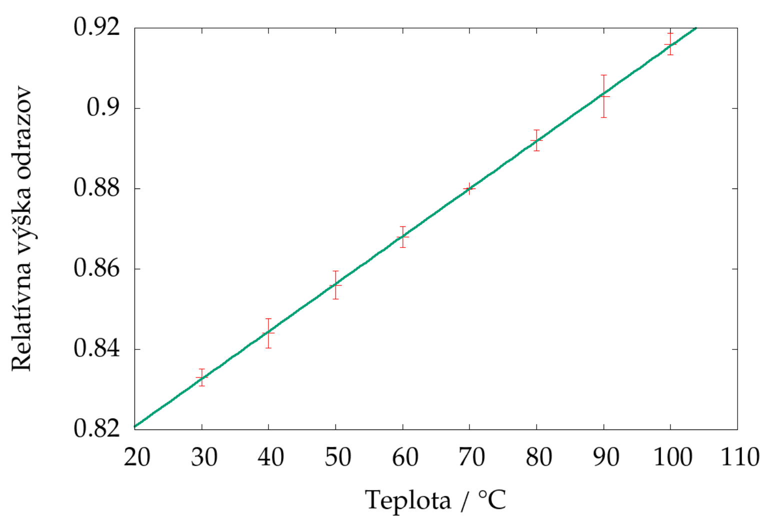
Jednoduchý a vcelku presný spôsob je natáčať si pohyb loptičky pri nakreslenej stupnici alebo pri natiahnutom metri. A následne získať údaje z videí pomocou počítačového programu.

Výsledky merania

Merali sme pri 8 teplotách a každé meranie sme opakovali 3 krát. Získané údaje sú v tabuľke a sú aj spracované v grafe.

Tabuľka 2: *Odrazy sú pomer odrazenej výšky a počatočnej výšky*

Teplota [°C]	Odraz 1	Odraz 1	Odraz 1	Priemer
30	0,832	0,835	0,831	0,833 ± 0,002
40	0,841	0,843	0,848	0,844 ± 0,004
50	0,860	0,854	0,854	0,856 ± 0,004
60	0,867	0,871	0,866	0,868 ± 0,003
70	0,880	0,880	0,880	0,880 ± 0,000
80	0,891	0,895	0,890	0,892 ± 0,003
90	0,899	0,909	0,901	0,903 ± 0,005
100	0,917	0,913	0,918	0,916 ± 0,003



Obrázok 3: *Graf závislosti*

Záver

Z našich meraní sme usúdili, že výška odrazu gumenej loptičky lineárne rastie s teplotou.

3.4 Jablko nepadá ďaleko od stromu

vzorák **Tomáš Š.**, opravoval **Tomáš Š.**

Zvážme možnosť, že by Kubo na strom liezol. Ťažisko človeka je v stoji väčšinou vo výške jeho brucha - pre 1,80 m vysokého priemerného človeka by to mohlo byť vo výške okolo 1 m. Kubo potrebuje, aby natiahnutou rukou, ktorá prečnieva tak 50 cm nad hlavu, dosiahol na jablko. Keďže samotný vrch Kubovej hlavy je ešte 80 cm nad jeho ťažiskom, potrebuje svoje ťažisko premiestniť z výšky 1 metra, do výšky 4 m − 0,5 m − 0,8 m = 2,7 m.

Rozdiel vo výške, Δh, je teda 1,7 m. Energia, ktorú je teoreticky nutné dodať na túto zmenu výšky, je $m \cdot g \cdot \Delta h$, kde m je Kubova hmotnosť a g je gravitačné zrýchlenie. To bude potrebná energia pri lezení za jablkom.

V situácii, keď hádžeme do jablka kameň, ho hádžeme pod uhlom okolo 60 stupňov, nakoľko tak sa nám dobre mieri na cieľ nad nami. Ak by sme mierili pod omnoho väčším uhlom, ak mierime zle, kameň by mohol spadnúť späť na nás, čomu sa chceme vyhnúť.

Ak sa budeme spoliehať len na horizontálnu zložku rýchlosti, že zhodí jablko, potom nám stačí dohodiť kameň do výšky jablka. Ako efektívnu výšku hodu, kde je kameň vypustený z ruky, si zoberme 2,15 m (výška dlane natiahnutej ruky zdvihnutej nad hlavou pod uhlom 60°). To reprezentuje typ hodu, kde mám ruku dosť pokrčenú a počas hodu ju vystriem.

Potrebujeme teda s pomocou energie vertikálnej rýchlosti, $E_y = \frac{1}{2} m \cdot v_y^2$, pomôcť kameňu prekonať vertikálny rozdiel 4 m − 2,15 m = 1,85 m. Vertikálnu rýchlosť vyjadríme ako časť celkovej rýchlosti, $v_y = v_{\text{celková}} \cdot \sin(60°)$.

Spravíme si rovnicu, $E_y = E_h$, teda

$$\frac{1}{2} m \cdot v_{\text{celková}}^2 \cdot \sin^2(60°) = m_{\text{kameň}} \cdot g \cdot 1{,}85\ \text{m}$$

z čoho zistíme, že

$$E_{\text{celková}} = \frac{m_{\text{kameň}} \cdot g \cdot 1{,}85\ \text{m}}{\sin^2(60°)}.$$

(E_h je energia potrebná na vyhodenie jablka o h metrov vyššie.)

Odhadnime hmotnosť dostatočne ťažkého kameňa na 50 g = 0,05 kg. Do celkovej hmotnosti by sme tiež mali zarátať aj hmotnosť ruky, ktorou kameň hádžeme, nakoľko aspoň niektoré jej časti (iba niektoré, kvôli tomu, ako vyzerá pohyb, ktorým niečo hádžeme) musia zrýchliť na rovnakú rýchlosť, ako kameň, ktorý je vypustený z dlane. Ako horný odhad použime hmotnosť celej ruky. Priemerná ruka(od ramena) má podľa známych meraní[4] hmotnosť tak 5 % z hmotnosti človeka. Keď si to porovnáme s hmotnosťou kameňa, zistíme, že hmotnosť kameňa je zanedbateľná a tak ju pre zjednodušenie vynecháme.

Vzorček pre samotný hod tak vyzerá nasledovne:

$$E_1 = \frac{0{,}05 m_{\text{Kubo}} \cdot g \cdot 1{,}85\ \text{m}}{\sin^2(60°)}.$$

[4] https://robslink.com/SAS/democd79/body_part_weights.htm

Ešte však netreba zabúdať, že pre každý hod sa najprv musíme zohnúť po kameň. Ak máme iba jeden, budeme si poň musieť aj chodiť, čo nevieme ľahko vyčísliť pomocou energií, takže to zanedbáme. Ideálne však máme na zemi kameňov viac. Po kameň sa zohneme drepom[5] pričom naše ťažisko klesne na úroveň okolo 50 cm nad zemou. Keď budeme vstávať, musí sa naše ťažisko zase zdvihnúť o rozdiel od normálnej polohy, ktorá je, ako bolo spomenuté, 1 m nad zemou. Rozdiel vo výške je teda 0,5 m. Toto vyžaduje pre jeden hod energiu

$$E_2 = m_{\text{Kubo}} \cdot g \cdot 0{,}5\ \text{m}.$$

Potom ešte zdvíhame samotnú ruku k hodu(s kameňom, ktorý znova zanedbáme), pričom jej ťažisko zdvihneme niekde na úroveň vrchu hlavy(1,8 m). Prirodzená poloha tohto ťažiska je niekde na úrovni spodnej hranice hrudníka, pri našom priemernom človeku približne 1,3 m nad zemou. Toto zase vyžaduje každý raz energiu

$$E_3 = 0.05 m_{\text{Kubo}} \cdot g \cdot 0{,}5\ \text{m}$$

Energia potrebná pre celý proces hádzania bude teda

$$E_1 + E_2 + E_3.$$

Vyčíslime oba vzorce. Energia potrebná na lezenie na strom nám vyjde skoro presne 1000 J. Energia potrebná na jeden hod bude 382 J, v tomto zložení:

$$E_1 = 73\ \text{J}.$$

$$E_2 = 294\ \text{J}.$$

$$E_3 = 15\ \text{J}.$$

Vyšlo nám, že házdať tri a viac krát nás bude stáť väčšiu energiu, než liezť na strom. To však zase ignorujeme, že liezť na strom nie je také ľahké (a energeticky nenáročné) ako liezť, povedzme, na tak isto vysoký rebrík.

3.5 #Mám nabité

vzorák **Danko**, opravoval **Danko**

Pri dizajne hlavne pištole sa pracuje s určitou silou výbuchu, ktorú chceme čo najlepšie zužitkovať do rýchlosti a presnosti náboja. Problém s takým bežným nábojom je, že aj napriek svojej rýchlosti a pomerne vysokej hustote je dosť ľahký. To znamená, že každé zafúkanie by mohlo náboj vychýliť, čomu chceme ideálne predísť. Tomu sa dá predísť jedine tak, že bude potreba väčšiu silu na vychýlenie náboja z kurzu.

Pokiaľ by sa nám podarilo teleso nejakým spôsobom roztočiť okolo pozdĺžnej osi, vedeli by sme do neho uložiť energiu aj pri menšej rýchlosti – ak sa energia výbuchu čiastočne spotrebuje na roztočenie náboja, bude mať menšiu rýchlosť ale rovnakú energiu. Táto energia bude v podobe momentu hybnosti náboja, čo je zotrvačnosť jeho rotácie. To zťažuje vychýlenie náboja z rovnej trajektórie, tak ako pri hybnosti objekt odporuje zastaveniu, lebo vychýlenie by znamenalo aj zmenu rotácie náboja. Tento jav sa nazýva gyroskopický efekt, a vyskytuje sa kdekoľvek pri rotujúcich objektoch, a dá sa zacítiť keď sa takýto objekt snažíte otočiť (Napríklad pri kolese bicykla alebo fidget spinneri).

[5] povráva sa, že je to tak najlepšie pre chrbticu

Presne tento účel majú drážky, ktoré hýbajúci sa vzduch po výbuchu usmernia aby sa víril jedným smerom, čím sa roztočí aj náboj.