Korešpondenčný seminár UFO
XIII. ročník, 2019/2020
UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Panika v tuneli

vzorák **Marianka**, opravovala **Marianka**

Na začiatok si poďme premeniť zadané jednotky na základné.

$$v_M = 25\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \doteq 6{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_v = 110\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \doteq 30{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Keďže ľudský reflex a aj zdravý rozum nám hovorí, že treba utekať od približujúceho sa vlaku, tak sa pozrime najskôr na možnosť, kedy sa Marianka otočí vlaku chrbtom a uteká von z východu, ktorý je ďalej. Vieme, že Marianka uteká rýchlosťou $6{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ a východ je od nej vzdialený 225 m.

$$t_{M1} = \frac{225\,\mathrm{m}}{6{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

$$t_{M1} \doteq 32{,}6\,\mathrm{s}$$

Teraz potrebujeme zistiť, či sa tam vlak dostane skôr ako Marianka, alebo nie. Vieme, že si to vlak šinie rýchlosťou $30{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ a východ je od neho vzdialený 225 m + 750 m, pretože Marianka je od východu vzdialená 225 m a vlak od nej ešte o ďalších 750 m navyše.

$$t_{v1} = \frac{975\,\mathrm{m}}{30{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

$$t_{v1} \doteq 31{,}9\,\mathrm{s}$$

Vidíme, že Marianke sa neoplatí otočiť sa a utekať od vlaku, pretože by ju vlak dobehol a to predsa nechce. Poďme sa pozrieť na druhú možnosť, kde sa rozbehne oproti vlaku a uteká von z východu, ktorý je bližšie. Marianka stále uteká rýchlosťou $6{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, ale východ je teraz od nej vzdialený 135 m.

$$t_{M2} = \frac{135\,\mathrm{m}}{6{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

$$t_{M2} \doteq 19{,}6\,\mathrm{s}$$

Teraz znova musíme zistiť, za aký čas to prejde vlak. Ten si to stále šinie rýchlosťou 30,6 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ a východ je od neho vzdialený 750 m – 135 m, pretože Marianka je od vlaku vzdialená 750 m, ale východ je od nej vzdialený iba 135 m.

$$t_{v2} = \frac{615\ \mathrm{m}}{30{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

$$t_{v2} \doteq 20{,}1\ \mathrm{s}$$

Marianka zvládne vybehnúť z východu, ktorý je priamo pred ňou.

1.2 Spaghetti al dente

vzorák **Benjamin**, opravoval **Benjamin**

Čas t, ktorý trvá Patrikovi uvariť špagety, je rovný súčtu časov t_z a t_v. Kde t_z je čas, ktorý trvá zahrievanie a t_v je čas, ktorý sú špagety vo vode. Tento čas máme napísaný v zadaní, takže $t_v = 12$ min. Čas t_z si už však musíme vypočítať.

Tento čas trvá, dokým voda nezačne vrieť. Voda za normálnych podmienok vrie pri teplote $T = 100$ °C. Na to, aby sa zvýšila teplota vody, ju treba zohriať. Pri zohrievaní jej dodávame teplo. Množstvo tepla, ktoré musíme dodať vode, aby sa ohriala na teplotu T, si označme Q. Na výpočet tepla Q máme v zadaní objem vody $V = 1{,}5$ l a počiatočnú teplotu $T_0 = 25$ °C. Údaje, ktoré bolo potrebné si dohľadať, boli hustota vody $\rho = 1\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$ a jej merná tepelná kapacita $c = 4180\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}$. Teraz si už vieme zostaviť rovnicu pre teplo Q a dostaneme

$$Q = cV\rho(T - T_0).$$

Teplo vode dodáva sporák, ktorý má výkon $P = 2$ kW. Zo zadania vieme, že pre účinnosť platí $\eta \cdot 100\ \% = 70\ \%$. Z čoho pre účinnosť dostaneme $\eta = 0{,}7$. Pre výkon platí rovnica

$$P = \frac{Q}{t_z \eta},$$

z čoho si vyjadríme čas t_z, dosadíme za teplo Q a dostaneme

$$t_z = \frac{cV\rho(T - T_0)}{P\eta}.$$

Po dosadení v správnych jednotkách dostaneme výsledok $t_z = 5{,}6$ min. Preto celkový čas t bude 17,6 minút.

1.3 Nie je palec ako palec

vzorák **M&M a Jaro**, opravoval **M&M**

Úloha od nás chce nájsť také rozmiestnenie závaží, aby bol rozdiel výšok piestov blízko jednému palcu. Mohli by sme začať ukladať nejaké závažia a počítať, aký bude výsledok, ale iba by sme sa zbytočne namakali. Pri výpočtoch by sme sa totiž zamysleli, že robíme stále skoro to isté, iba dosadzujeme iné hodnoty závaží. Preto by sme mohli radšej uvažovať, že máme na jednom pieste závažie o hmotnosti m_1 a na druhom závažie o hmotnosti m_2, a vypočítame, o koľko sa piesty posunú. Taktiež si ich plochy označíme $S_1 = 10\ \mathrm{cm}^2$ a $S_2 = \pi S_1$.

Pre hydraulické piesty musí platiť rovnosť tlakov v rovnakej výške. Nech je jeden piest o h vyššie ako druhý. Na chvíľu si predstavme, že piest 2 je vyššie ako 1. Vieme, že v hydraulickom zariadení platí rovnosť tlakov, $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$. Lenže keď dáme na jeden piest závažie, tak sa zvýši tlak, a aby stále platila rovnosť, tak sa druhý piest pohne vyššie. Ako sa takto vykompenzuje sila, keď plocha ostane rovnaká? Pridáme k hmotnosti závažia aj hmotnosť vodného stĺpca nad výškou prvého piesta. Teda presnejšie rovnica $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$ platí v konkrétnej výške. Preto dostaneme rovnicu

$$\frac{m_1}{S_1} = \frac{m_2 + hS_2\rho_{\mathrm{H_2O}}}{S_2} = \frac{m_2}{S_2} + h\rho_{\mathrm{H_2O}}.$$

Je vidieť, že keby sme mali opačnú situáciu, piest 2 by bol nižšie ako 1, potom by nám stačilo uvažovať výšku h zápornú.

Dosadíme teraz niektoré známe hodnoty ako $h = \pm \mathit{palec} = \pm 2{,}54\ \mathrm{cm}$, $S_1 = 10\ \mathrm{cm}^2$, $S_2 = \pi \cdot 10\ \mathrm{cm}^2$ a $\rho_{\mathrm{H_2O}} = 1\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. Trochu poupravujeme a dostaneme

$$\pi m_1 = m_2 \pm 2{,}54 \cdot 10 \cdot \pi \mathrm{g},$$

$$3.14 \cdot m_1 - m_2 \approx \pi \cdot m_1 - m_2 = \pm 25{,}4 \cdot \pi \mathrm{g} \approx 79{,}79\ \mathrm{g}.$$

Možností ako usporiadať 10 závaží na dve plochy, pričom môžeme aj nepoužiť závažie, je $3^{10} = 59049$, čo je veľa na manuálne prehľadávanie. Preto použijeme tabuľkový procesor, napr. Excel, alebo si napíšeme program, ktorý vyskúša všetky možnosti. Takúto tabuľku nájdete na `https://fks.page.link/ufo_13_2_1` Pri prezeraní odporúčame stiahnuť, nie prezerať na drive.

Pri prehľadávaní nájdeme dvoch kandidátov v tabuľke, ktorých musíme ešte viac preskúmať $m_1 = 49\ \mathrm{g} + 16\ \mathrm{g}$, $m_2 = 100\ \mathrm{g} + 81\ \mathrm{g} + 64\ \mathrm{g} + 25\ \mathrm{g} + 9\ \mathrm{g} + 4\ \mathrm{g} + 1\ \mathrm{g}$ a $m_1 = 64\ \mathrm{g} + 1\ \mathrm{g}$, $m_2 = 100\ \mathrm{g} + 81\ \mathrm{g} + 49\ \mathrm{g} + 25\ \mathrm{g} + 9\ \mathrm{g} + 4\ \mathrm{g}$. Všimnime si, že v oboch prípadoch máme $m_1 = 65\ \mathrm{g}$, $m_2 = 284\ \mathrm{g}$ a $h \approx -2{,}54\ \mathrm{cm}$. Keďže sme prešli všetky možnosti, tak vieme, že ide o ideálne riešenia.

Samozrejme úloha sa dala vyriešiť aj efektívnejšie bez nutnosti prehľadávať všetky možnosti. Predpokladajme, že na piestoch sú umiestnené závažia m_1, resp. m_2, a nájdime, aký je výškový rozdiel piestov v takej situácii. Z toho, čo sme už pred tým napísali, vieme ľahko nájsť, že hľadaný výškový rozdiel je

$$h\,[\mathrm{cm}] = \frac{\pi m_1\,[\mathrm{g}] - m_2\,[\mathrm{g}]}{10\pi}.$$

Zostavme si v Exceli nasledovnú tabuľku a poďme ju postupne vypĺňať:

m_1 [g]	m_2 [g]	h [cm]	$\Delta = h\,[\mathrm{cm}] - 2{,}54\ \mathrm{cm}$	$\lvert\Delta\rvert$

Manuálne budeme zadávať iba hmotnosti a zvyšok tabuľky sa bude aktualizovať automaticky. V treťom stĺpci sa nám zobrazí výškový rozdiel medzi piestami[1], vo štvrtom o koľko sa tento rozdiel líši od jedného palca. Piaty stĺpec slúži len na hľadanie minima.

Začnime. Na úvod vidíme, že keď na piestoch nie sú žiadne závažia, prvý piest je vyššie, takže ak chceme, aby bol, práve naopak, nižšie, musíme ho určite zaťažiť. Začnime teda s prázdnym druhým piestom. Ľahko zistíme, že ak by sme chceli dosiahnuť rozdiel presne jeden palec, potrebovali by sme závažie o hmotnosti 25,4 g. Také nanešťastie nemáme. Dajme tam teda to najbližšie, čo máme, teda $m_1 = 25$ g. Uvidíme, že Δ je ešte záporná, preto skúsme na prvý piest ešte prihodiť. Vyskúšame teda $m_1 = 26$ g. Teraz je už Δ kladná, takže sme trochu prestrelili. Musíme teda prihodiť aj na druhý piest. Jednogramové závažie sme už však použili, preto prihoďme hneď 4 g. Zistíme, že to je ale priveľa, preto opäť prihodíme na prvý piest. Najmenšia vyššia hmotnosť, ktorú vieme vytvoriť, je 29 g. To ale znamená, že musíme prehodiť štvorgramové závažie na prvý piest. Na druhom potom môžeme vyskúšať 9, 10 *a* 16 g. Takto budeme postupne pokračovať, až preveríme všetky zmysluplné možnosti. Začiatok tabuľky by potom mohol vyzerať nejako takto:

m_1 [g]	m_2 [g]	h [cm]	$\Delta = h$ [cm] − 2,54 cm	$\lvert\Delta\rvert$
25	0	2,5	−0,04	0,04
26	0	2,6	0,06	0,06
26	4	2,472 676	−0,067 32	0,067 32
29	9	2,613 521	0,073 521	0,073 521
29	10	2,581 69	0,041 69	0,041 69
29	16	2,390 704	−0,1493	0,1493

Keď sa dopracujeme na koniec, tak situáciu otočíme a budeme preverovať možnosti, v ktorých by bol hore prvý piest, t.j. možnosti, v ktorých je h rovné mínus jeden palec.[2] Na záver už len nájdeme minimum v piatom stĺpci, čím nájdeme najoptimálnejšiu voľbu závaží.

Takýmto postupom sme znížili počet možností, ktoré bolo treba preveriť, zhruba na odmocninu z celkového počtu, čo je už slušná optimalizácia, no nie?

1.4 Premrznutý Danko

vzorák **Danko**, opravoval **Danko**

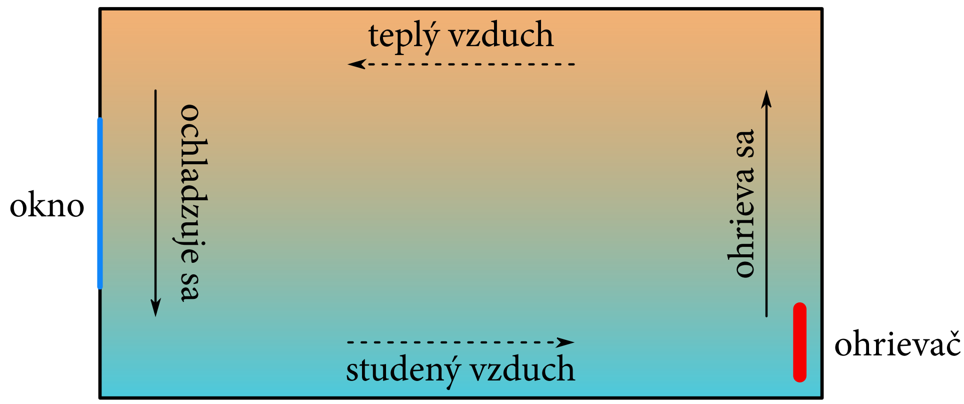
To, že bolo cítiť prievan, znamemá, že vzduch sa musel po miestnosti nejak pohybovať. Keďže bolo okno zavreté, presúval sa iba vrámci nej. Prečo by si však nejaký objem vzduchu povedal, že sa presunie, a iný sa zase presunie na jeho miesto? K objasneniu tejto otázky napovedá zvyšok zadania, kde sa spomína ohrievač na druhej strane miestnosti.

Tento ohrievač zvyšuje teplotu okolitého vzduchu, ktorý sa dôsledkom toho rozpína. Takýto ohriaty vzduch má potom menšiu hustotu, a preto sa vznesie nad chladnejší vzduch v miestnosti. Opačný efekt na vzduch má zase okno na opačnej strane miestnosti, ktoré prenáša teplo zo vzduchu v miestnosti na chladnejší vzduch vonku, čím sa vzduch v miestnosti ochladzuje. Rovnako, ako sa ohriaty vzduch rozpína, po ochladení svoj objem zmenšuje, čím sa stáva hustejším ako okolitý vzduch a klesá k podlahe.

[1] kladný, ak je druhý piest vyššie – v súlade s naším predpokladom
[2] Vo štvrtom stĺpci musíme odpočítavať −2,54 cm.

Neskončí sa to však statickým stavom, kde je studený vzduch pri podlahe a ohriaty pri strope. Na jednej strane miestnosti sa totiž oknom ochladený vzduch orieva ohrievačom, a tým pádom prudko stúpa nahor, a okno je na opačnej strane, kde ochladzuje vzduch vo vrchnej časti miestnosti, ktorý klesá zase naspäť nadol.

Takto sa teda kvôli zmene teploty a hustoty bude vzduch cykliť po miestnosti, a asi najsilnejšie to bude cítiť na parapete, kadiaľ bude prúdiť všetok klesajúci vzduch od okna k podlahe.

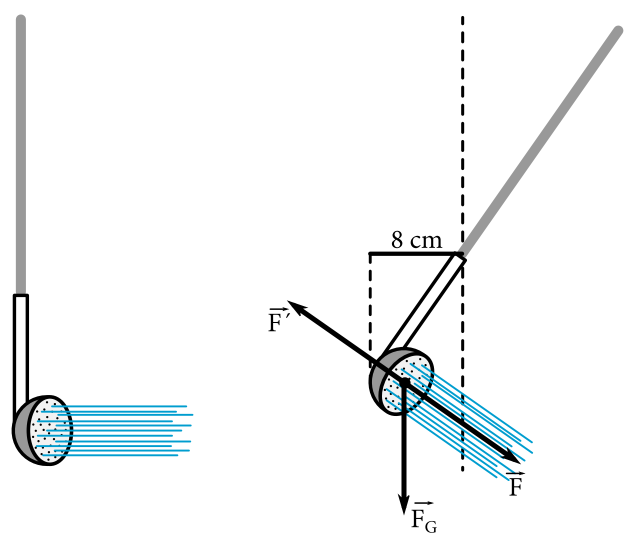


Obrázok 1: *Prúdenie vzduchu v miestnosti*

1.5 Marcel v sprche

vzorák **Lukáš G.**, opravoval **Lukáš G.**

To, ako ďaleko od zvislého smeru nám prúd vychýli hlavicu, zjavne závisí od toho, aký je silný (a teda, akou silou musí pôsobiť hlavica na vodu, aby ju usmernila do trysiek). Označme si teda túto silu $\vec{F}$. Potom ale vďaka Newtonovmu zákonu akcie a reakcie musí z rovnakého pôsobiska pôsobiť aj reakčná sila $\vec{F'}$, ktorá má rovnakú veľkosť, ale opačný smer ako sila pôvodná. Môžeme si uvedomiť, že táto sila pôsobí na hlavicu a zapríčiňuje jej vychýlenie zo zvislého smeru. Bolo by teda fajn zistiť, aká musí byť, aby sa nám hlavica vychýlila o 8 cm zo zvislého smeru. Poďme na to.



Obrázok 2: *Pôsobiace sily v sústave*

Existujú dve metódy zistenia veľkosti $\vec{F'}$. Marcel drží hadicu 20 cm nad hlavicou a rukou nehýbe, teda toto miesto môžeme považovať za pevný bod našej sústavy. To ale znamená, že hlavica sa zo zvislého smeru vychýli otáčaním okolo tohoto pevného bodu. Toto pozorovanie nás môže naviesť k myšlienke, že hlavica je páka, Marcelova ruka je stred otáčania, a teda jednou metódou je pohrať s momentami síl. Druhou metódou je rozložiť gravitačnú silu na zložky tak, aby jedna sila išla v smere hadice, a teda neovplyvňovala otáčanie.

Hlavica ako páka

Na hlavicu nám pôsobia dve sily[3], ktoré sa ju otáčaním snažia vychýliť z rovnováhy, a to gravitačná sila $\vec{F_g}$ a reakčná sila k sile vytekajúcej vody $\vec{F'}$. Na to, aby sa nám otáčavé účinky síl vyrovnali a hlavica ostala v rovnováhe, musia sa momenty jednotlivých síl nasčítať do nuly.

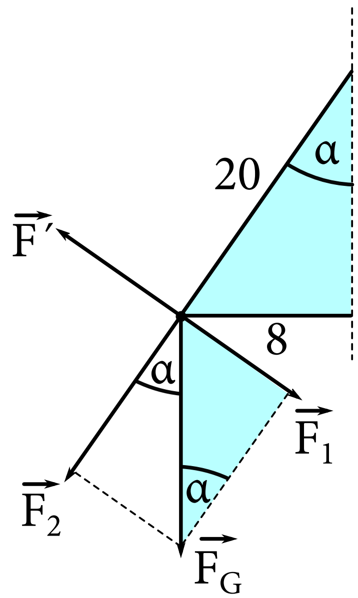
Poďme si osviežiť, ako moment sily vypočítame. Ak sila s veľkosťou F pôsobí v kolmej vzdialenosti r od osi otáčania (táto vzdialenosť sa nazýva aj rameno sily), jej moment určíme ako súčin $r \cdot F$. Čo sa týka znamienka, ak táto sila spôsobuje otáčanie v smere hodinových ručičiek, znamienko momentu je mínus, v opačnom prípade je moment kladný. Pozrime sa najskôr na moment reakčnej sily $\vec{F'}$. Keďže táto sila pôsobí na konci hlavice a je kolmá na hlavicu, jej kolmá vzdialenosť od stredu otáčania (Marcelovej ruky) je 20 cm = 0,2 m. Z obrázku vidíme, že jej účinkom sa hlavica otáča v smere hodinových ručičiek. Jej moment je preto $M_r = -0{,}2\,\mathrm{m} \cdot F'$. Čo sa týka momentu gravitačnej sily, treba si uvedomiť, že hľadáme kolmú vzdialenosť sily od stredu otáčania, a teda rameno gravitačnej sily **nie je** 20 cm. Hmotnosť hadice je zanedbateľná v porovnaní s hmotnosťou hlavice, a preto má gravitačná sila F_g pôsobisko približne v ťažisku hlavice. Rameno r_g preto musí byť rovné výchylke hlavice zo zvislého smeru, čiže 8 cm = 0,08 m. Veľkosť gravitačnej sily určíme ako súčin $mg = 0{,}1\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 1\,\mathrm{N}$. Gravitačná sila sa pokúša hlavicu vychýliť proti smeru hodinových ručičiek, a preto znamienko momentu musí byť kladné. Potom je jej moment $M_g = r_g F_g = 0{,}08\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{N} \doteq 0{,}08\,\mathrm{Nm}$. Ak však chceme, aby bola hlavica v rovnováhe, musí platiť, že súčet momentov je rovný nule. Preto

$$
\begin{aligned}
M_g + M_r &= 0, \\
0{,}08\,\mathrm{Nm} - 0{,}2\,\mathrm{m} \cdot F' &= 0, \\
0{,}08\,\mathrm{Nm} &= 0{,}2\,\mathrm{m} \cdot F', \\
F' &= 0{,}4\,\mathrm{N}.
\end{aligned}
$$

Rozklad gravitačnej sily

Všimnime si, že gravitačnú silu $\vec{F_g}$ vieme rozložiť na sily $\vec{F_1}$ a $\vec{F_2}$. Sila $\vec{F_2}$ ide v smere hadice, čo ale znamená, že neovplyvňuje otáčanie, čiže nás trápi iba sila $\vec{F_1}$.

[3] Pre úplnosť ešte dodáme, že na hlavicu pôsobia ďalšie dve sily, ktoré ale nemajú vplyv na jej otáčanie, keďže obe pôsobia v smere jej vychýlenia. Prvou je ťahová sila hadice, ktorá zabezpečuje, že hlavica sa na hadici udrží a nespadne dole. Keďže voda pred opustením hlavice mení naráža na jej koniec a mení smer, musí zabrzdiť, a teda druhou silou je reakčná sila k sile brzdiacej prúd vody.

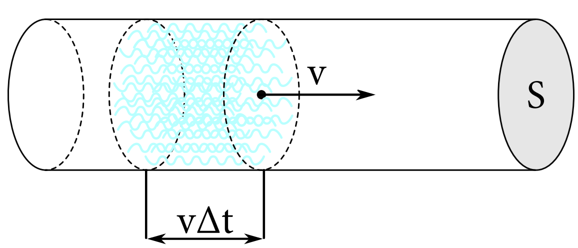


Obrázok 3: *Rozložená gravitačná sila a vyznačené podobné trojuholníky.*

Vyfarbené dva pravouhlé trojuholníky sú podobné (skúste si rozmyslieť, prečo). Potom ale pomer priľahlej odvesny k prepone musí byť v oboch rovnaký. Z toho dostávame $\frac{8}{20} = \frac{F_1}{F_g}$, čiže $F_1 = \frac{2}{5}F_g$. Aby sa sprcha netočila a bola v rovnováhe, musí platiť $|\overrightarrow{F'}| = |\overrightarrow{F_1}|$, čo znamená, že $F' = \frac{2}{5}mg = \frac{2}{5} \cdot 0{,}1\ \mathrm{kg} \cdot 10\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 0{,}4\ \mathrm{N}$, pričom vidíme, že sme dostali rovnaký výsledok, ako keby sme išli cez páku.

Späť k vode

Máme zistiť, aký má byť objemový prietok vody, a preto by bolo fajn posvietiť si na to, čo to ten objemový prietok je. Objemový prietok Q určuje, aký objem vody pretečie nejakým miestom za určitý čas (povedzme 1 sekundu). Platí teda $Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$. Poznáme však aj iný vzťah na určenie objemového prietoku - tzv. *rovnicu kontinuity*, podľa ktorej $Q = Sv$, kde S je plocha prierezu potrubia alebo otvoru, ktorým voda preteká a v je jej rýchlosť v tomto mieste. Povieme si aj, prečo táto rovnica platí. Keďže rýchlosť vody je v, za čas Δt prekoná voda dráhu $v\Delta t$. Potom ale objem, ktorý prierezom S prejde za čas Δt je rovný objemu valca s podstavou S a výškou $v\Delta t$. To ale znamená, že $Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{Sv\Delta t}{\Delta t} = Sv$.



Obrázok 4: *Objemový prietok v trubici*

My prierezy otvorov trysiek poznáme, chýba nám však rýchlosť vody. Je teda načase nejako využiť silu, ktorú sme vypočítali v predošlom odstavci.

Keďže F' je reakčná sila k sile F, vieme, že majú rovnakú veľkosť, a teda $F = 0{,}4$ N. Sila je definovaná ako zmena hybnosti za zmenu času, teda $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$. Ďalej hybnosť je určená ako súčin hmotnosti a rýchlosti. Keďže ale voda vyteká z hlavice stále rovnakou rýchlosťou, tak zmena hybnosti je súčinom rýchlosti a hmotnosti vody, ktorá za čas Δt prierezom pretečie, čiže $\Delta p = \Delta m \cdot v$. No a nakoniec hmotnosť je súčinom hustoty a objemu, pričom hustota vody je stála, čiže $\Delta m = \rho \Delta V$. Preto môžeme písať:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m v}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V v}{\Delta t} = \rho \frac{\Delta V}{\Delta t} v = \rho Q v.$$

Opäť nám tu vystupujú dve veličiny, ktoré nepoznáme, a to Q a v. Vyjadrime si teda z oboch rovníc rýchlosť. Dostaneme

$$v = \frac{Q}{S},$$

$$v = \frac{F}{\rho Q}.$$

Rýchlosť je však len jedna, a preto pravé strany oboch rovníc môžeme porovnať, z čoho dostaneme

$$\frac{Q}{S} = \frac{F}{\rho Q},$$

$$Q^2 = \frac{FS}{\rho},$$

$$Q = \sqrt{\frac{FS}{\rho}}.$$

Uvedomme si, že sme sa pozerali na rýchlosť vody v tryskách, nie v hadici, a preto musíme použiť celkový prierez trysiek, nie hadice. Ten je $S = 100 \cdot 1\ \mathrm{mm}^2 = 1\ \mathrm{cm}^2 = 0{,}0001\ \mathrm{m}^2$. Potom už ale vieme vypočítať prietok ako

$$Q = \sqrt{\frac{FS}{\rho}} = \sqrt{\frac{0{,}4\ \mathrm{N} \cdot 0{,}0001\ \mathrm{m}^2}{1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}} = 0{,}0002\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}} = 200\ \frac{\mathrm{ml}}{\mathrm{s}}.$$