Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Blýskavica

vzorák **Tomáš**, opravoval **Tomáš**

Podľa zadania uvažujeme, že blesk prejde každým miestom dráhy v prakticky rovnakom okamihu a v každom mieste vytvorí len na malú chvíľku (nie na dlhší časový interval) zvuk hrmenia.

Zvuk je nejaké vlnenie vzduchu, ktoré zdroj zvyčajne vyšle do všetkých smerov. K nám dorazí tá časť tohto vlnenia, ktorá na nás priamo smeruje, t.,j. šíri sa po priamej spojnici medzi zdrojom a nami. Po tejto spojnici vlnenie cestuje práve rýchlosťou zvuku, ktorá závisí na látke, ktorá sa vlní. Pre vzduch je táto rýchlosť šírenia vlnenia približne $330\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

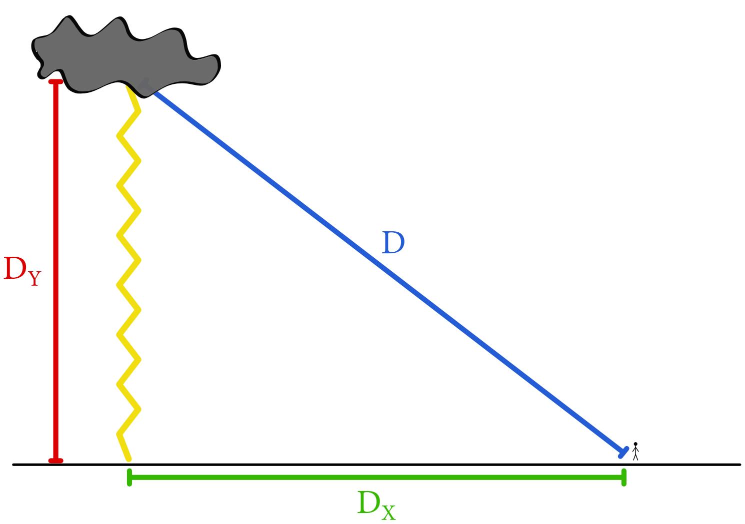
Keďže hrmenie na každom mieste dráhy blesku trvá len chvíľku, dôvod, prečo počujeme hrom trvajúci niekoľko sekúnd je, že z rôznych miest k nám dorazí zvuk v rôznych časoch a vytvára tak dojem spojitého hrmenia.

Pri blesku, ktorý udrie z oblaku kolmo na miesto na zemi pod ním, práve hrmenie z toho miesta, kde sa blesk stretáva so zemou, budeme počuť ako prvé (lebo má od nás iba horizontálnu vzdialenosť, nemá vertikálnu vzdialenosť).

Ďalej budeme hrmenie počuť z ďalších miest po dráhe blesku, stále vyšších a vyšších.

Úplne nakoniec k nám dorazí zvuk z miesta, kde blesk v oblaku začína, nakoľko to je od nás najvzdialenejšie – okrem vzdialenosti rovnobežnej na povrch Zeme (horizontálnej vzdialenosti), ktorá je pre všetky miesta po dráhe nášho kolmého blesku rovnaká, má spomedzi všetkých miest na dráhe blesku najväčšiu vertikálnu vzdialenosť – je v najväčšej výške vzhľadom na našu pozíciu.

Predstavme si to na nákrese:



Obrázok 1: *Vzdialenosti od blesku*

Horizontálnu vzdialenosť (D_{x}) blesku od nás určíme ako $8\,\mathrm{s} \cdot 330\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2640\,\mathrm{m}$, pretože zvuku trvalo túto vzdialenosť prejsť rýchlosťou $330\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ osem sekúnd.

Vzdialenosť od najvyššieho bodu blesku až k nám trvalo zvuku prejsť zase až dvanásť sekúnd. Celková vzdialenosť (D) bola teda $330\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 12\,\mathrm{s} = 3960\,\mathrm{m}$. Ale ako z tohto vypočítame výšku, t.,j. vertikálnu vzdialenosť (D_{y})?

Nakoľko blesk udrel na zem kolmo, horizontálna vzdialenosť a vertikálna vzdialenosť tvoria odvesny pravouhlého trojuholníka, zatiaľ čo celková vzdialenosť je preponou.

Zostrojíme rovnicu podľa Pytagorovej vety:

$$D^2 = D_{\mathrm{x}}^2 + D_{\mathrm{y}}^2,$$

z čoho vyjadríme

$$D_{\mathrm{y}}^2 = D^2 - D_{\mathrm{x}}^2$$

a nakoniec

$$D_{\mathrm{y}} = \sqrt{D^2 - D_{\mathrm{x}}^2}.$$

Dosadíme $D = 3960\,\mathrm{m}$ a $D_{\mathrm{x}} = 2640\,\mathrm{m}$.

Zistíme, že $D_{\mathrm{y}} = 2951\,\mathrm{m}$, blesk teda začal približne v troch kilometroch nad zemou.

2.2 No moment, prekážka!

vzorák **Benjamin**, opravoval **Benjamin**

Ako našu sústavu si zvolíme rebrík a Lukáša. Prečo práve túto sústavu? Lebo sa budeme pozerať len na vonkajšie sily pôsobiace na sústavu, takže nebudeme musieť riešiť silové pôsobenie medzi Lukášom a rebríkom.

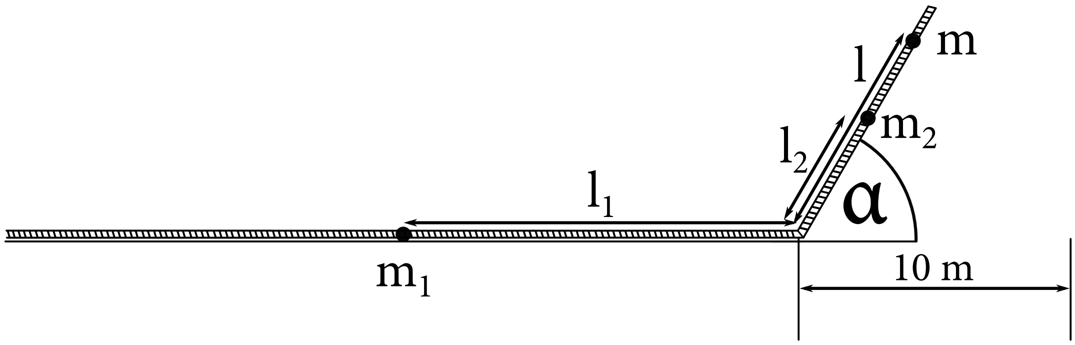
Úlohu vieme riešiť viacerými spôsobmi. Tu si ukážeme riešenie pomocou ťažiska a riešenie pomocou momentov síl.

Riešenie pomocou ťažiska

Naša sústava bude stabilná, keď sa jej ťažisko bude nachádzať medzi koncami dotykových plôch rebríka so zemou. Keď sa už bude nachádzať nad jamou, tak rebrík začne padať do jamy, aby sa mu znížila potenciálna energia. Ak si za počiatok súradnicovej sústavy zvolíme ohyb rebríku a kladný smer osi x ako smer doprava (k jame), tak sa rebrík prevráti, keď bude platiť

$$x_T > 0$$

kde x_T je x-ová súradnica polohy ťažiska. Budú nás zaujímať len x-ové súradnice, lebo len od nich závisí, kedy sa rebrík prevráti. Označme si m_1 hmotnosť dlhšieho ramena rebríka a l_1 jeho polovičnú dĺžku. Obdobne si označíme aj pre kratšie rameno ako m_2 a l_2. Pre Lukáša si zavedieme jeho hmotnosť m a vzdialenosť od ohybu po Lukáša l. Posledné označenie bude susedný uhol k vnútornému uhlu rebríka ako α.



Obrázok 2: *Naša sústava*

Pre výpočet x_T si budeme musieť vypočítať x_1, x_2 a x. Pre x_1 dostaneme $x_1 = -l_1$. Pre x_2 už budeme musieť použiť trigonometriu a dostaneme $x_2 = l_2 \cos\alpha$. Pre x znovu použijeme trigonometriu a dostaneme $x = l\cos\alpha$.

Polohu ťažiska si potom vypočítame ako vážený priemer hmotností častíc v sústave podľa ich vzdialenosti. Dostaneme teda

$$x_T = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + mx}{m_1 + m_2 + m}$$

$$x_T = \frac{-m_1l_1 + m_2l_2\cos\alpha + ml\cos\alpha}{m_1 + m_2 + m}$$

Vieme, že aby sa rebrík prevrátil, musí platiť $x_T > 0$. Preto dostaneme nerovnicu

$$\frac{-m_1l_1 + m_2l_2\cos\alpha + ml\cos\alpha}{m_1 + m_2 + m} > 0$$

Túto nerovnicu si postupnými úpravami vyriešime. Nezabúdajte, že všetky hmotnosti aj vzdialenosti sú kladné čísla, takže nemusíme riešiť otáčanie nerovnice.

$$-m_1l_1 + m_2l_2\cos\alpha + ml\cos\alpha > 0$$

$$ml\cos\alpha > m_1l_1 - m_2l_2\cos\alpha$$

$$l > \frac{m_1l_1 - m_2l_2\cos\alpha}{m\cos\alpha}$$

Hmotnosti m_1 a m_2 si vieme vyjadriť pomocou ich dĺžok $2l_1$, $2l_2$ a dĺžkovej hmotnosti μ ako $m_1 = 2l_1\mu$ a $m_2 = 2l_2\mu$. Po dosadení vyjadrení dostaneme

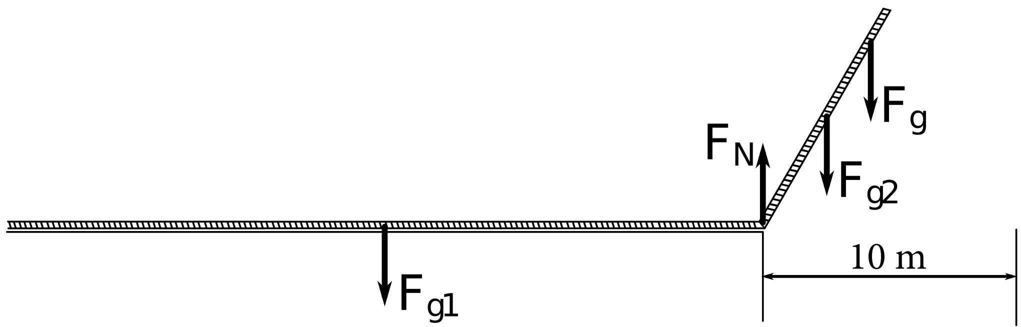
$$l > \frac{2\mu}{m}\left(\frac{1}{\cos\alpha}l_1^2 - l_2^2\right)$$

$$l > 7\ \text{m}$$

Preto Lukáš musí vyliezť po rebríku viac ako 7 **metrov**. Musel sa preto vyšplhať do výšky viac ako $l \sin\alpha$, teda viac ako 6.06 **metrov**.

Riešenie pomocou momentov síl

Na začiatok uvediem, že budeme pracovať s veľkosťami síl, ale nazývať ich budeme len silami. Vonkajšie sily, ktoré nám pôsobia na sústavu sú gravitačná sila prvého ramena $F_{g_1} = m_1 g$, gravitačná sila druhého ramena $F_{g_2} = m_2 g$, gravitačná sila pôsobiaca na Lukáša $F_g = mg$ a normálová sila od zeme $F_N = F_{g_1} + F_{g_2} + F_g$. Gravitačné sily majú pôsobisko v daných ťažiskách a normálová sila na mieste dotyku rebríka so zemou. Toto miesto bude pod ohybom rebríka, lebo to bude jediné miesto dotyku rebríka zo zemou v momente, keď sa rebrík preváži.



Obrázok 3: *Sily v našej sústave*

Našu sústavu si vieme predstaviť ako páku, ktorá má os otáčania v bode ohybu rebríka. A uhol, ktorý zvierajú ramená, nie je 180°, ale len 120°. Preto na určenie kolmých vzdialeností budeme musieť v niektorých prípadoch použiť trigonometriu.

Rebrík sa preváži smerom do jamy. Tento smer je v smere hodinových ručičiek, čiže záporný smer. Preto pre výsledný moment síl bude platiť.

$$M < 0$$

Pre výpočet M si budeme musieť vypočítať M_1, M_2, M_L a M_N. Pre M_1 dostaneme $M_1 = F_{g_1} l_1$. Pre M_2 už budeme musieť použiť trigonometriu a dostaneme $M_2 = -F_{g_2} l_1 \cos\alpha$. Pre M_L znovu použijeme trigonometriu a dostaneme $M_L = -F_g l \cos\alpha$. Pre M_N dostaneme 0 Nm, lebo normálová sila má pôsobisko v osi otáčania.

Dostaneme teda

$$M_1 + M_2 + M_L < 0$$

$$F_{g_1} l_1 - F_{g_2} l_1 \cos\alpha - F_g l \cos\alpha < 0$$

$$m_1 g l_1 - m_2 g l_1 \cos\alpha - mgl \cos\alpha < 0$$

$$-m_1 l_1 + m_2 l_2 \cos\alpha + ml \cos\alpha > 0$$

Dostali sme nerovnicu, ktorú sme už mali vyššie, preto vieme, že sa úpravami dostaneme k rovnakému výsledku.

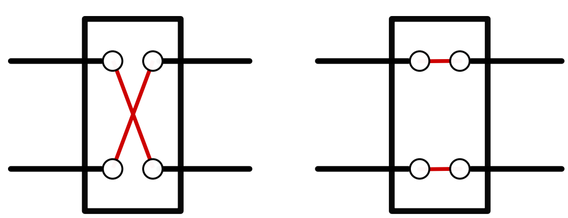
2.3 Nesvieti, svieti, nesvieti, ...nesvieti?! vzorák **Lukáš G.**, opravoval **Lukáš G.**

Ako si môžeme všimnúť, obvod zo zadania je inšpirovaný "schodišťákmi" z nedávnej úlohy.[1] V Krtkovom obvode máme sériovo (tzn. za sebou) zapojené dve sady schodišťákov. To môže navodiť dojem, že budú fungovať rovnako dobre. Ba dokonca aj na youtube sa dá nájsť video[2], kde si autor takýto obvod vytvoril a vyzerá, že funguje. Neverte však všetkému, na čo na internete narazíte. My si teraz vysvetlíme, prečo Krtkov obvod nefunguje tak, ako by skutočne mal, a ako človek vo videu vedel, ktoré prepínače stláčať, aby navodil dojem, že to funguje.

Predstavme si, že jednu sadu schodišťákov máme v spodnej časti schodišťa a druhú vo vrchnej (je to tak aj celkom výhodné, lebo sa tak naťahá menej káblov). Ďalej si predstavme, že sme na vrchu schodišťa a chceme zasvietiť svetlo, ale nechce sa nám chodiť na spodok schodiska. Ak spodnými schodišťákmi prechádza prúd, tak keďže s nimi nebudeme manipulovať, správajú sa ako vodič. Pre nás to v podstate znamená, že Krtkov obvod sa správa ako jednoduché schodišťáky, a teda v tomto prípade naozaj funguje. Problém nastáva, keď sú dolné schodišťáky nastavené tak, že nimi neprechádza prúd. Keďže sme sa rozhodli s nimi nemanipulovať, prúd nimi prechádzať nebude, a teda nebude splnená podmienka uzavretosti obvodu. Ak teda spodnými schodišťákmi neprechádza prúd, môžeme sa aj pokrájať, ale zhora žiarovku nezapneme.

Všimnime si, že v Krtkovom obvode v rozpoložení, v akom sa nachádza v zadaní, žiarovka nesvieti, pretože obvod nie je uzavretý. Keby sme prepli prepínač najviac vľavo, obvod by stále ostal neuzavretý a žiarovka by sa teda nerozsvietila. No a keď si dôslednejšie pozriete spomínané video, tak si všimnete, že vždy, keď jeho autor prepínal prepínač z jednej sady schodišťákov, tak prepínače v druhej sade boli nastavené tak, že nimi prúd prechádzal. Možno to bola náhoda, skôr to však vyzerá tak, že nevedel obvod so štyrmi žiarovkami vytvoriť, a tak navodil ilúziu, že to funguje - tým, že cielene prepínal vhodné prepínače. Keby sme sa nad tým poriadne nezamysleli, pravdepodobne by sme mu to aj mohli uveriť. Dávajte si preto pozor na to, čo vám niekto chce nahovoriť a radšej si to vždy poriadne overte.

Stačilo ku kritickému mysleniu, teraz ideme vytvoriť fungujúci obvod. Tu treba spomenúť tzv. „krížový prepínač". Má dva vstupy, dva výstupy a dve polohy. Prvý vstup vedie do jedného z výstupov a druhý do toho zvyšného. Prepnutím prepínača si vstupy na kríž „vymenia" výstupy.

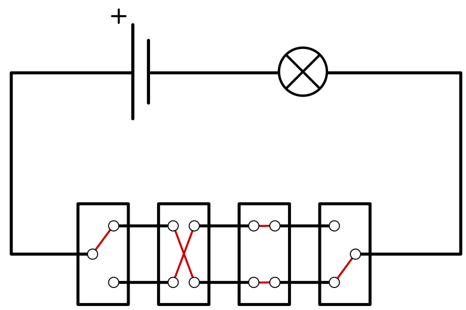


Obrázok 4: *Dva stavy krížového prepínača*

Ukážeme, že keď zapojíme za sebou zaradom prepínač, 2 krížové prepínače a prepínač (ako na obrázku), bude obvod fungovať presne tak, ako by sme chceli.

[1] Ak neviete, ako také schodišťáky fungujú, odporúčam si prečítať vzorové riešenie na https://ufo.fks.sk/ulohy/riesenia/1412/

[2] https://www.youtube.com/watch?v=fKpsEP2hjQ8



Obrázok 5: *Funkčný obvod so štyrmi prepínačmi*

Uvedomme si, že ak oba okrajové prepínače vedú na rovnaký vodič, musí byť párny počet krížových prepínačov v prekríženej polohe, a ak vedú na rôzne vodiče, musí byť nepárny počet krížových prepínačov v prekríženej polohe. Ak teda prepneme jeden z okrajových prepínačov, tak sa zmení podmienka parity na tú druhú, čo ale znamená, že žiarovka svieti práve v jednom z týchto dvoch prípadov (buď pred stlačením prepínača alebo po ňom). Ak prepneme jeden z krížových prepínačov, podmienka parity ostane nezmenená, ale parita sa zmení, čo opäť znamená, že stav žiarovky sa prepol na opačný. Tým je dokázaná funkčnosť tohoto obvodu. Podotknime ešte, že rovnaká úvaha sa dá použiť na ľubovoľný počet požadovaných prepínačov ≥ 2.

2.4 Keď nekvapká, aspoň tečie

vzorák **Marianka**, opravovala **Marianka**

Na začiatok si premeňme zadané jednotky na základné.

$$v_k = 2\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} = 0{,}02\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$a = 5\ \mathrm{cm} = 0{,}05\ \mathrm{m}$$

$$r = 1\ \mathrm{dm} = 0{,}1\ \mathrm{m}$$

Keďže chceme zistiť rýchlosti teplej a studenej vody v rúrkach, ktoré napájajú kohútik, tak poznáme vzorček, ktorý nám pomôže tieto rýchlosti vypočítať. Takýto vzorec sa volá rovnica kontinuity a vyzerá takto:

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$$

Tento vzorec platí, pretože vieme, že voda je nestlačiteľná kvapalina a tečie nepretržitým prúdom. Tým pádom, ak máme niekde väčší obsah v priereze, tak tam voda potečie pomalšie a ak máme niekde menší obsah v priereze, tak tam voda potečie rýchlejšie.

Najskôr sa poďme pozrieť na tok v kohútiku. Rýchlosť prúdu už vieme zo zadania. Obsah si vieme vypočítať, pretože vieme, že kohútik má tvar štvorca so stranou dlhou $a = 0{,}05$ m.

$$S_k = a \cdot a = 0{,}05\ \mathrm{m} \cdot 0{,}05\ \mathrm{m}$$

$$S_k = 0{,}0025\ \mathrm{m}^2$$

Teraz potrebujeme vypočítať druhú stranu rovnice, ktorá sa týka rúrok s teplou a studenou vodou. Keďže voda, ktorá tečie z týchto rúrok sa sčíta a nakoniec vytečie von kohútikom, tak na druhej strane rovnice musia byť hodnoty pre obidve rúrky. Vyzeralo by to asi nejak takto:

$$S_k \cdot v_k = S_s \cdot v_s + S_t \cdot v_t$$

My však vieme, že rúrka so studenou aj teplou vodou sú rovnaké, čiže aj ich prierez bude rovnaký, takže rovnicu si vieme upraviť takto:

$$S_k \cdot v_k = S_r(v_s + v_t)$$

Teraz si môžeme vypočítať obsah prierezu rúrky. Vieme, že polomer rúrky je $r = 0{,}1$ m, takže obsah bude:

$$S_r = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (0{,}1\ \mathrm{m})^2$$

$$S_r \doteq 0{,}0314\ \mathrm{m}^2$$

Vypočítať jednotlívé rýchlosti sa môže zdať ťažké, pretože sú to dve neznáme. My však vieme, že Jaro pustil studenú a teplú vodu v pomere 3:1, čiže studená voda potečie trikrát rýchlejšie než teplá. Tým pádom vieme, že $v_s = 3 \cdot v_t$, takže môžeme jednoducho vypočítať rýchlosť napríklad teplej vody.

$$S_k \cdot v_k = S_r(3 \cdot v_t + v_t)$$

$$S_k \cdot v_k = 4 \cdot S_r \cdot v_t$$

$$\frac{S_k \cdot v_k}{4 \cdot S_r} = v_t$$

Teraz iba dosadíme čísla a máme rýchlosť teplej vody.

$$v_t = \frac{0{,}0025\ \mathrm{m}^2 \cdot 0{,}02\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{4 \cdot 0{,}0314\ \mathrm{m}^2}$$

$$v_t \doteq 0{,}000\,398\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

A rýchlosť studenej vody je:

$$v_s = 3 \cdot v_t$$

$$v_s = 3 \cdot 0{,}000\,398\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_s \doteq 0{,}001\,194\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

2.5 A znova, a znova, a znova

vzorák **Danko**, opravoval **Danko**

Problém tohto perpetuum mobile je v tom, že loptička sa nemá ako napojiť na vodný stĺpec. Napojenie by sme mohli chcieť spraviť nejak tak, že na boku stĺpca je nejaká dierka, ktorou sa loptička vkotúľa dnu. Aj keby sa nám podarilo zabezpečiť, že voda sa tadiaľ nevyleje, pri pokuse prepchať ňou loptičku narazíme na odpor – nejakú silu pôsobiacu na loptičku, ktorú by bolo treba prekonať, aby sa loptička dostala dnu. Pokiaľ by sme sa loptičku snažili dostať do stĺpca zospodu, je asi jasné, čo by nám v tom bránilo. Vložením loptičky by sme vytlačili vodu hore, a teda by bolo treba dodať energiu na prekonanie gravitačnej sily pôsobiacej na vodu (zmení sa na potenciálnu). Táto sila, ktorou pôsobí voda na predmety v nej, je spôsobená hydrostatickým tlakom. No a jedným známym faktom je, že vďaka spôsobu, akým interagujú častice kvapalín, pôsobí hydrostatický tlak nielen priamo nadol, ale aj všetkými inými smermi, teda aj na loptičku vchádzajúcu do vodného stĺpca zboku. Tento fakt si vieme vysvetliť aj tak, že keď loptičku do stĺpca vsunieme zboku, stále musí svojím objemom vytlačiť vodu smerom nahor, čo dokáže práve vďaka vlastnosti vody, ktorá vie meniť svoj tvar.

Samozrejme, že tento príklad by sa mohol dať odbiť argumentom, že ak by toto perpetuum mobile fungovalo, tak by porušovalo zákon zachovania energie, ktorý hovorí, že energiu nevieme len tak „vyrobiť z ničoho“. To nám ale ako riešenie nestačí, zaujíma nás kde sa pri tomto procese energia spotrebuje, aby bol tento zákon dodržaný – to je práve prekonávanie hydrostatického tlaku. Tiež by sa dalo tvrdiť, že nebude možné toto perpetuum mobile zostrojiť z iných praktických dôvodov. Napríklad lebo sa nedá urobiť dierka, ktorou nebude unikať voda, alebo že bude vznikať nejaké trenie, keď chceme dostať loptičku zo stĺpca na šmykľavku. Tieto problémy sa však dajú prekonať, trenie alebo podobné výdavky energie sú konštantné, no získanú energiu vieme ľahko znásobiť napríklad zväčšením stĺpca vody. Problém s dierkou vieme zase vyriešiť napríklad tak, že namiesto loptičky použijeme plastovú trubku uzavretú do kruhu alebo celý pás loptičiek za sebou. Tak by bola dierka vždy vyplnená.