# Riešenia 3. kola letnej časti

## 3.1 Voľný pád

vzorák **Lukáš G.**, opravoval **Lukáš G.**

### Teoretický úvod – Prvá časť

Vieme, že na Zemi nám na telesá pôsobí gravitačná sila s veľkosťou $F_G = mg$, kde $m$ je hmotnosť telesa a $g \doteq 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ je gravitačné zrýchlenie na Zemi. Na základe druhého Newtonovho zákona preto vieme, že teleso, na ktoré pôsobí gravitačná sila, sa pohybuje rovnomerne zrýchleným pohybom so zrýchlením $g$ (čiže každú sekundu sa rýchlosť zvýši o približne $9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$). Preto vieme rýchlosť takéhoto pohybu v čase $t$ určiť ako $v(t) = v_0 + gt$, kde $v_0$ je počiatočná rýchlosť. Ešte si však musíme uvedomiť, že skúmame voľný pád, a teda Krtkova loptička začína padať s nulovou počiatočnou rýchlosťou. Vzťah preto vieme zjednodušiť na $v(t) = gt$. Keďže rýchlosť rastie rovnomerne, priemerná rýchlosť rovnomerného pohybu, ktorý trvá čas $T$, je rovný polovici maximálnej dosiahnutej rýchlosti, a teda $v_p = \frac{1}{2}v(T) = \frac{1}{2}gT$. S touto vedomosťou už vieme určiť celkovú dráhu, ktorá je rovná priemernej rýchlosti prenásobenej dobou trvania pohybu, a teda $s = v_pT = \frac{1}{2}gT^2$. Keďže však uvažujeme voľný pád smerom nadol, dráha, ktorú loptička prejde, je rovná výške $H$, z ktorej padá, a teda $H = \frac{1}{2}gT^2$, z čoho vieme ekvivalentnými úpravami dostať

$$T = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

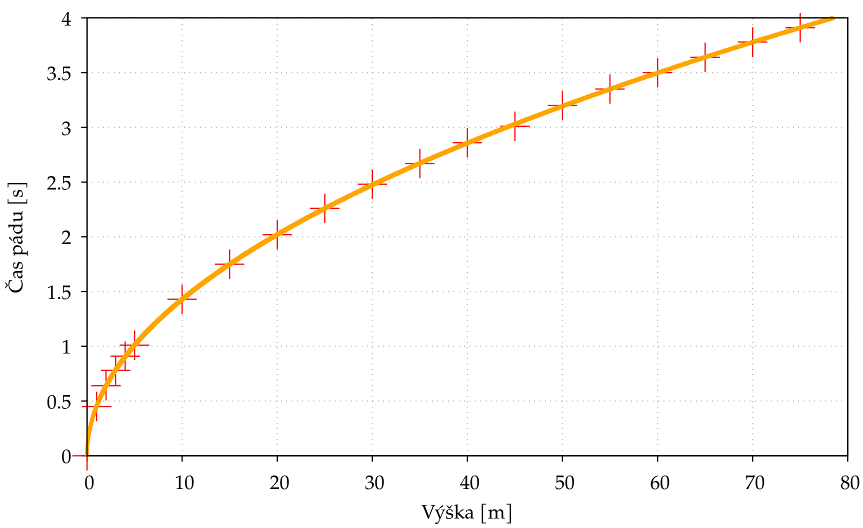
Vidíme, že doba dopadu by mala rásť odmocninovo vzhľadom na výšku, z ktorej kameň padá. Poďme to teda overiť.

### Meranie – Prvá časť

Keďže skúmame voľný pád, je dôležité počiatočnú rýchlosť nastaviť na hodnotu 0. Počiatočná ypsilonová súradnica nám zjavne vyjadruje výšku, z ktorej loptička padá, tú preto budeme postupne meniť. Hodnota gravitačného zrýchlenia je vopred prednastavená pre Zem, preto ju meniť netreba. Ostatné parametre nám voľný pád neovplyvňujú, preto ich meniť nemusíme. Namerané hodnoty si následne zaznamenávame do tabuľky a zakreslíme ich do grafu.

| Výška (m) | Čas pádu (s) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0,45 |
| 2 | 0,64 |
| 3 | 0,78 |
| 4 | 0,91 |
| 5 | 1,01 |
| 10 | 1,43 |
| 15 | 1,75 |

| Výška (m) | Čas pádu (s) |
|---|---|
| 20 | 2,02 |
| 25 | 2,26 |
| 30 | 2,48 |
| 35 | 2,67 |
| 40 | 2,86 |
| 45 | 3,01 |
| 50 | 3,2 |
| 55 | 3,35 |




Obrázok 1: *Graf závislosti doby pádu loptičky od výšky na Zemi*

Môžeme si všimnúť, že hodnoty naozaj ležia na veľmi peknej odmocninovej krivke a naše teoretické očakávania spĺňajú.

### Teoretický úvod – Druhá časť

Pri tejto časti si musíme pripomenúť gravitačný zákon, ktorý hovorí, že gravitačnú silu vo všeobecnosti určíme ako $F_G = G\frac{Mm}{r^2}$, kde $G$ je gravitačná konštanta, $M$ je hmotnosť planéty, $m$ je hmotnosť telesa a $r$ je vzdialenosť telesa od stredu planéty. Keďže je však vzdialenosť telesa od povrchu planéty zanedbateľne malá oproti polomeru planéty, stačí uvažovať, že $r$ je polomer planéty. Pre Zem teda platí $F_G = G\frac{M_Z m}{r_Z^2}$ a zároveň $F_G = mg$, z čoho vieme vyjadriť, že $g = G\frac{M_Z}{r_Z^2}$. Následne sa vieme pozrieť na to, aké gravitačné zrýchlenie $g_p$ pôsobí na neznámej planéte:

$$g_p = G\frac{M_p}{r_p^2} = G\frac{1{,}8M_Z}{(1{,}2r_Z)^2} = \frac{1{,}8}{1{,}44}\cdot\frac{M_Z}{r_z^2}\cdot G = 1{,}25g.$$

Vidíme, že zrýchlenie na neznámej planéte by malo byť 1,25-krát väčšie ako na Zemi. Poďme sa ešte pozrieť, ako by to malo ovplyvniť časy dopadov pri rovnakej výške.

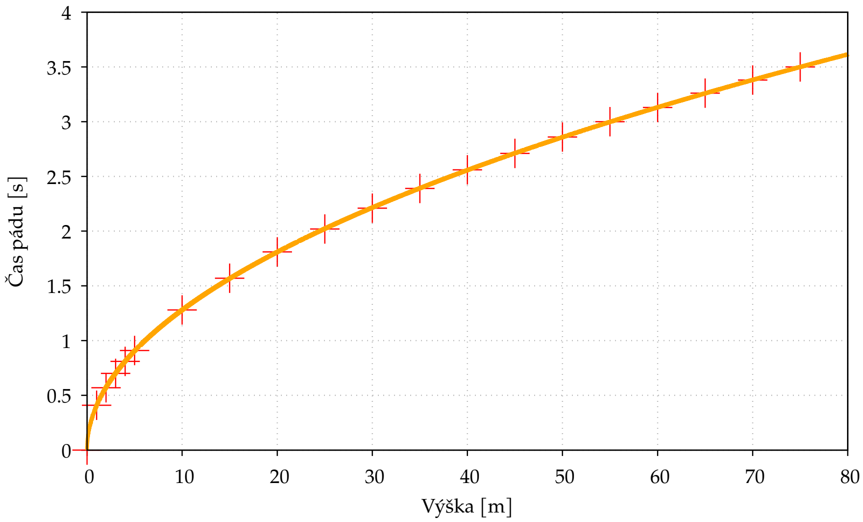
$$\frac{T_Z}{T_p} = \frac{\sqrt{\frac{2H}{g}}}{\sqrt{\frac{2H}{g_p}}} = \sqrt{\frac{g_p}{g}} = \sqrt{1{,}25} \doteq 1{,}12,$$

čiže na neznámej planéte by mala loptička dopadať 1,12-krát kratšie ako na Zemi. Teóriu už máme, poďme teda simulovať.

**Meranie – Druhá časť**

Jediný rozdiel oproti prvému meraniu je, že musíme zmeniť gravitačné zrýchlenie. Keďže vieme, že na neznámej planéte je 1,25-krát väčšie ako na Zemi, nastavíme jeho hodnotu na 12,26 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Následne sa môžeme pustiť do simulácii. Namerané hodnoty si opäť zaznamenáme do tabuľky a grafu.

| Výška (m) | Doba pádu (s) | $\frac{T_Z}{T_p}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | |
| 1 | 0,41 | 1,1 |
| 2 | 0,57 | 1,12 |
| 3 | 0,7 | 1,11 |
| 4 | 0,81 | 1,12 |
| 5 | 0,91 | 1,11 |
| 10 | 1,28 | 1,12 |
| 15 | 1,57 | 1,11 |
| 20 | 1,81 | 1,12 |
| 25 | 2,02 | 1,12 |
| 30 | 2,21 | 1,12 |
| 35 | 2,39 | 1,12 |
| 40 | 2,56 | 1,12 |
| 45 | 2,71 | 1,12 |
| 50 | 2,86 | 1,12 |
| 55 | 3 | 1,12 |
| 60 | 3,13 | 1,12 |
| 65 | 3,26 | 1,12 |
| 70 | 3,38 | 1,12 |
| 75 | 3,5 | 1,12 |




Obrázok 2: *Graf závislosti doby pádu loptičky od výšky na neznámej planéte*

Na grafe opäť vidíme, že závislosť rastie odmocninovo, a následne vieme overiť, že pomer dôb dopadov je naozaj okolo 1,12.

### Záverečné slovo

Ešte by sme mali zodpovedať otázku, prečo Krtko experimentoval na póle. Ide o to, že ako sa planéta točí okolo svojej osi, vzniká pri tomto otáčavom pohybe odstredivá sila, ktorá by mohla výsledky skresliť. Čím sme však bližšie k osi otáčania, odstredivá sila je nižšia. Keď sa Krtko nachádza na póle, je priamo na osi otáčania, a teda na loptičku nepôsobí žiadna odstredivá sila.

## 3.2 Odporový voľný pád

vzorák **Tomáš Š.**, opravoval **Tomáš Š.**

### Teoretický úvod

V prvej úlohe sme si povedali, že počas voľného pádu (v bezodporovom prostredí) objekt zväčšuje svoju rýchlosť každú sekundu o 9,81 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, a to až dovtedy, dokým nedopadne. Čo by sa stalo, ak by sme oproti gravitačnej sile postavili (do presne opačného smeru) nejakú silu $F_{\mathrm{op}}$, najskôr uvažujúc, že má nemennú veľkosť?

Ak je $F_{\mathrm{op}}$ menšia než gravitačná sila, teleso bude stále zrýchľovať smerom nadol, aj keď menším tempom. Ak je $F_{\mathrm{op}}$ rovnaká, teleso nebude meniť svoju rýchlosť – tieto dve sily sa navzájom celkom vyrušia. Ak by $F_{\mathrm{op}}$ bola väčšia, teleso začne zrýchľovať v opačnom smere, než ako pôsobí gravitačná sila.

Naša odporová sila je takouto opačnou silou, ale my vieme, že jej veľkosť nie je konštantná, ale závisí priamo úmerne na rýchlosti telesa – dokonca kvadraticky. Ostatné faktory, ktoré na ňu vplývajú, sa v priebehu pádu nemenia – ide o prierez loptičky, jej aerodynamický koeficient a hustotu prostredia.

Podľa vzorca vidíme, že odporová sila je na začiatku pádu nulová. Potom sa zväčšuje priamo úmerne s rýchlosťou. Pokiaľ je menšia, než rýchlosť, platí prvá spomenutá situácia – loptička stále zrýchľuje, len čoraz pomalším tempom, lebo odporová sila sa zväčšuje. Čo sa stane, keď sa odporová sila vyrovná gravitačnej? Nastane druhá situácia. Loptička celkom prestane zrýchľovať. A v takom stave už ostane – rýchlosť sa nemení, čiže ani odporová sila sa nemení, ostáva rovná gravitačnej. A rýchlosť, ktorú sme dosiahli, sa nazýva terminálna (konečná) rýchlosť – ktorou už bude teleso padať po celý zvyšok svojho pádu.

Terminálnu rýchlosť vieme zistiť tak, že dáme do rovnosti odporovú a gravitačnú silu, následne vyjadríme.

$$F_O = F_G$$

$$\frac{CS\rho v^2}{2} = mg$$

$$v^2 = \frac{2mg}{CS\rho}$$

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{CS\rho}}$$

**Doba pádu v závislosti od výšky nad Zemou**

**Zamyslenie:** Čas dosiahnutia terminálnej rýchlosti je pre rovnaké teleso vo voľnom páde vždy rovnaký, bez ohľadu na to, či ho púšťam z väčšej výšky, keďže výška neovplyvňuje odporovú silu a nijako badateľne neovplyvňuje ani gravitačnú silu[1]. Každý voľný pád v odporovom prostredí tak vieme rozdeliť na dve časti – pred dosiahnutím terminálnej rýchlosti, a ak padalo teleso dostatočne dlho aby ju dosiahlo, aj na časť po dosiahnutí terminálnej rýchlosti.

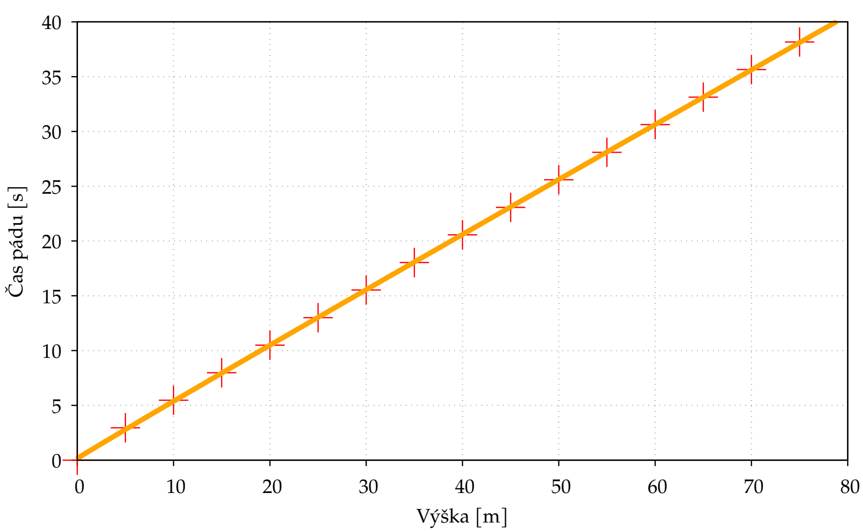
Čo sa týka časti pred dosiahnutím terminálnej rýchlosti, všimnime si, že čím bližšie k tejto rýchlosti sme, tým menšia je akcelerácia – tým pomalšie rýchlosť rastie. Ale stále rastie, takže keď pridáme ďalší meter k existujúcej dĺžke pádu, prejdeme ho priemerne za menej.

Čo sa týka časti po dosiahnutí terminálnej rýchlosti, ak budeme pridávať ďalšiu dráhu, po nej už bude loptička padať terminálnou rýchlosťou. Tá je konštantná, teda prírastok času bude odtiaľto rásť lineárne – v grafe uvidíme od tohto času priamku pod nejakým konkrétnym sklonom.

**Meranie:** Simuláciu sme vykonali s objektom, pri ktorom bude najlepšie vidieť rozdiel medzi pádom vo vzdušnej atmosfére a pádom vo vákuu – plážovou loptou. Plážová lopta môže mať polomer okolo 15 cm a odhadli sme, že váži približne 25 g. Najprv sme simulovali jej pád v odporovom prostredí:

[1] Pokiaľ našu loptičku nepúšťame niekde z horného okraja atmosféry.

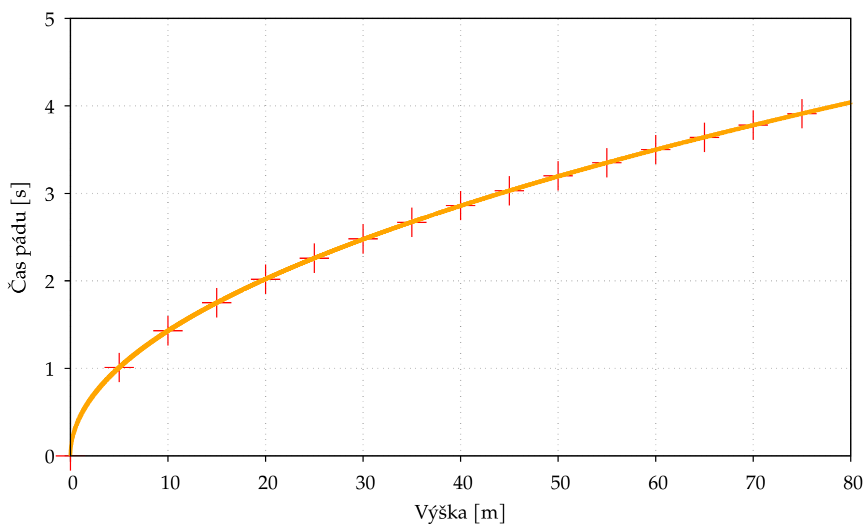
| Výška | Doba pádu |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 5 | 2,95 |
| 10 | 5,47 |
| 15 | 7,98 |
| 20 | 10,50 |
| 25 | 13,00 |
| 30 | 15,53 |
| 35 | 18,04 |
| 40 | 20,56 |
| 45 | 23,07 |
| 50 | 25,59 |
| 55 | 28,10 |
| 60 | 30,62 |
| 65 | 33,13 |
| 70 | 35,65 |
| 75 | 38,16 |




Obrázok 3: *Graf závislosti doby pádu plážovej lopty od výšky, s odporom vzduchu*

A potom vo vákuu:

| Výška | Doba pádu |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 5 | 1,01 |
| 10 | 1,43 |
| 15 | 1,75 |
| 20 | 2,02 |
| 25 | 2,26 |
| 30 | 2,48 |
| 35 | 2,67 |
| 40 | 2,86 |
| 45 | 3,03 |
| 50 | 3,20 |
| 55 | 3,35 |
| 60 | 3,50 |
| 65 | 3,64 |
| 70 | 3,78 |
| 75 | 3,91 |




Obrázok 4: *Graf závislosti doby pádu plážovej lopty od výšky, vo vákuu*

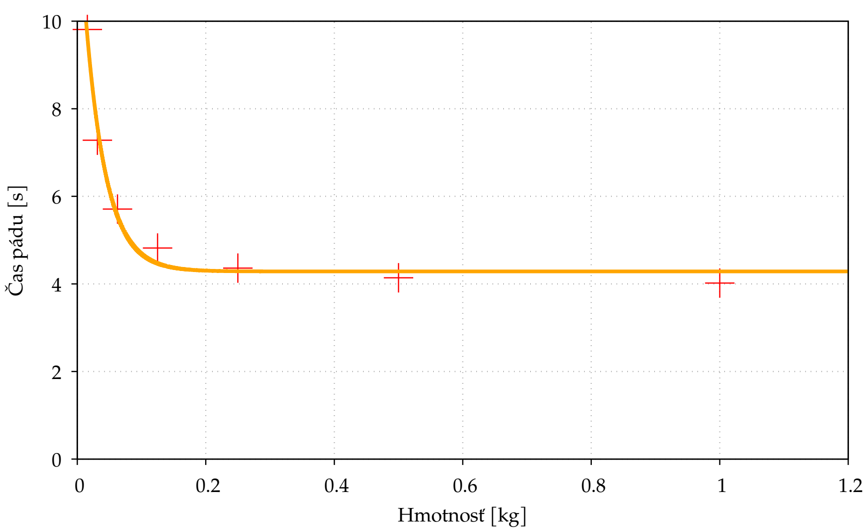
Simulácia nám potvrdila náš predpoklad – pri páde v atmosfére sme veľmi rýchlo dosiahli terminálnu rýchlosť (ktorá bola malá, teda pád trval dlho) a ďalej sa čas pádu zvyšoval lineárne v závislosti od pridanej výšky. Pri páde vo vákuu sa zase teleso správalo tak, ako sme odvodili v úlohe 1, doba pádu bola nezávislá od hmotnosti a tvaru, bola závislá iba od počiatočnej výšky, a to odmocninovo.

### Doba pádu v závislosti od hmotnosti

**Zamyslenie:** Ak máme rovnako veľkú loptičku, vzťah pre odporovú silu vyjde rovnaký bez ohľadu na hmotnosť. Avšak gravitačná sila je závislá od hmotnosti. V ľubovoľnom okamihu pádu teda ostane po odčítaní odporovej sily viac gravitačnej sily pri ťažšej loptičke než pri ľahšej. Zrýchlenie v danom okamihu bude teda väčšie. Celkový predpoklad by teda bol, že hustejšia loptička bude menej ovplyvnená odporom vzduchu.

**Meranie:** Simuláciu sme vykonali s loptičkami o polomere 5 cm a o hmotnosti postupne 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ a $\frac{1}{64}$ kg. Púšťali sme ich z výšky 75 m.

| Hmotnosť | Doba pádu |
|---|---|
| 0,015 63 | 9,81 |
| 0,031 25 | 7,28 |
| 0,0625 | 5,71 |
| 0,125 | 4,82 |
| 0,25 | 4,36 |
| 0,5 | 4,14 |
| 1 | 4,02 |




Obrázok 5: *Graf závislosti doby pádu loptičky od jej hmotnosti*

Je to pomerne výpovedné – medzi loptičkou o hmotnosti 1 kg a loptičkou o hmotnosti $\frac{1}{64}$ kg pozorujeme viac ako dvojnásobný nárast v čase pádu spôsobený odporom vzduchu.

## 3.3 Vrh

vzorák **M&M**, opravoval **Danko**

### Teoretické minimum

Na začiatok si odvodíme vzorce pre vrhy a vypočítame z nich odhad, okolo ktorých hodnôt máme skúšať simuláciu.

Keď máme vrh s rýchlosťou $\vec{v}$ pod uhlom $\alpha$, môžeme ho rozdeliť na dve zložky, vertikálnu a horizontálnu. Ako to spraviť? Tak, aby platila Pytagorova veta. Alebo aj tak, aby ich súčet po zložkách dával dokopy späť $\vec{v}$:

$$\left|\vec{v_x}\right| = \cos(\alpha)\left|\vec{v}\right|,$$

$$\left|\vec{v_y}\right| = \sin(\alpha)\left|\vec{v}\right|,$$

$$\left|\vec{v}\right|^2 = \left|\vec{v_x}\right|^2 + \left|\vec{v_y}\right|^2 = \left|\vec{v}\right|^2\left(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)\right).$$

Teraz poďme na na samotný vrh. Keďže sme rozložili vrh na dva pohyby, jeden vodorovný, rovnomerný priamočiary a druhý vertikálny, rovnomerne zrýchlený, tak to, ako ďaleko doletí loptička, závisí od toho, ako dlho bude vo vzduchu a ako rýchlo letí. Teda ak by sme povedali, že nech je len najdlhšie vo vzduchu, mali by sme riešenie $\alpha = 90°$, kedy ale zjavne doletí do vodorovnej vzdialenosti 0. Takže očakávame nejaký kompromis medzi dĺžkou letu a rýchlosťou vodorovného pohybu.

Ako dlho je loptička vo vzduchu? To sa dá spočítať zo vzorca

$$h = \frac{1}{2}gt^2,$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Dobre, ale toto nám teraz prevedie problém hľadania času na hľadanie výšky. Na to však použijeme iné nástroje, a to sú energie. Na začiatku máme kinetickú energiu $E_k = \frac{1}{2}m\left|\vec{v_y}\right|^2$ a potenciálnu energiu v najvyššom bode $E_p = hmg$. A keďže máme bezstratový systém (t.j. bez odporu), tak kinetická energia na začiatku vrhu musí byť rovná potenciálnej v najvyššom bode. Samozrejme berieme iba kinetickú energiu zodpovedajúcu vertikálnej zložke rýchlosti.

$$hmg = E_p = E_k = \frac{1}{2}m\left|\vec{v_y}\right|^2,$$

odkiaľ

$$h = \frac{1}{2g}\left|\vec{v_y}\right|^2$$

Dosadíme do vzorca pre čas a máme

$$t = \sqrt{\frac{\sin(\alpha)^2\left|\vec{v}\right|^2}{g^2}} = \frac{\sin(\alpha)\left|\vec{v}\right|}{g}.$$

Teraz máme čas, počas ktorého loptička pôjde hore, a potom treba pridať ešte čas, ktorý pôjde dole, aby sme mali jej celkový čas vo vzduchu. Už to len vynásobiť rýchlosťou vodorovného pohybu a máme vzdialenosť.

$$s = 2\frac{\sin(\alpha)\left|\vec{v}\right|}{g}\cos(\alpha)\left|\vec{v}\right| = \frac{2}{g}\sin(\alpha)\cos(\alpha)\left|\vec{v}\right|^2.$$

Toto teraz chceme maximalizovať v závislosti od $\alpha$. Čiže chceme maximalizovať súčiniteľ $\sin(\alpha)\cos(\alpha)$. Na to použijeme nerovnosť medzi kvadratickým a geometrickým priemerom, ktorá hovorí, že pre čísla $a, b$ platí

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \sqrt{a \cdot b}$$

dosadiac $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$ máme

$$\sqrt{\frac{\sin\alpha^2+\cos\alpha^2}{2}} = \frac{1}{2} \geq \sqrt{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$$

pričom rovnosť nastáva keď $a = b$, teda keď $\alpha = 45°$.

### Experiment 1

Takže vieme, že máme hľadať optimum okolo $\alpha = 45°$. Samozrejme odpor vzduchu neuvažujeme, to je až na úlohu 4. Nastavíme $x = 0$, $y = 0$, $v = 20$, $g = 9{,}806\,65$ a budeme meniť uhol $\alpha$ od 40° po 50°. Experiment opakujeme jedenkrát, nakoľko opakovanie experimentu by neviedlo k spresneniu údajov na troch desatinných miestach, ktoré sú potrebné na nájdenie vhodného uhla.

| Uhol $\alpha$ | Vzdialenosť $x$ |
|---|---|
| 40 | 40,202 |
| 41 | 40,422 |
| 42 | 40,605 |
| 43 | 40,722 |
| 44 | 40,801 |
| 45 | 40,842 |
| 46 | 40,818 |
| 47 | 40,728 |
| 48 | 40,603 |
| 49 | 40,439 |
| 50 | 40,213 |

Z nameraných hodnôt vidíme, že skutočne pod uhlom 45° dohodíme najďalej.

**Teoretická časť 2**

Ako sme v predošlej časti ukázali, chceme robiť nejaký kompromis medzi časom a rýchlosťou. No tentokrát čas, ktorý pôjde loptička hore, nebude rovný času, ktorý pôjde dole.

Nech hádžeme z výšky $h_0 > 0$. Potom vzorce môžeme upraviť takto:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sin(\alpha)\left|\vec{v}\right|}{g} + \sqrt{\frac{\frac{1}{g}\left|\vec{v_y}\right|^2 + 2h_0}{g}}$$

A teda vzdialenosť $s$ je

$$s = \left(\frac{\sin(\alpha)\left|\vec{v}\right|}{g} + \sqrt{\frac{\frac{1}{g}\sin(\alpha)^2\left|\vec{v}\right|^2 + 2h_0}{g}}\right)\cdot\cos(\alpha)\left|\vec{v}\right|.$$

Tu sa už nedá ľahko nahliadnuť a povedať, kedy to bude optimálne. Samozrejme, sú metódy, ako to spraviť. Tie však neuvedieme, nakoľko si myslíme, že ďaleko presahujú rámec tohto textu.

**Experiment 2**

Ak budeme hľadať optimálny uhol s presnosťou na jedno desatinné miesto, budeme sklamaní. Pre predstavu dosaďme $x = 0{,}5$, $v = 20$ a hľadajme uhol. Zostrojíme nasledujúcu tabuľku:

| Uhol $\alpha$ | Vzdialenosť $x$ |
|---|---|
| 44 | 41,318 |
| 44,1 | 41,306 |
| 44,2 | 41,322 |
| 44,3 | 41,338 |
| 44,4 | 41,325 |
| 44,5 | 41,339 |
| 44,6 | 41,325 |

Z nej usúdime, že nevieme povedať, ktorá hodnota je tá správna. Prečo to takto dopadlo? Napríklad preto, že program, s ktorým pracujeme, vyhodnotí dotyk s rovinou vtedy, keď rýchlosť bude záporná. To však znamená, že niekedy to môže preskočiť kúsok viac do záporu ako inokedy.[2] Preto nevieme merať presne. Preto budeme uvažovať presnosť na stupne a budeme mať výšky od $x = 0{,}5$ po 10.

[2]Tento efekt by sa dal zmenšiť zjemnením časového kroku.

| Výška $x$ | Uhol $\alpha$ | Vzdialenosť $x$ |
|---|---|---|
| 0,5 | 44 | 41,318 |
| 1 | 44 | 41,8 |
| 1,5 | 44 | 42,297 |
| 2 | 44 | 42,78 |
| 2,5 | 43 | 43,266 |
| 3 | 43 | 43,734 |
| 3,5 | 43 | 44,203 |
| 4 | 42 | 44,648 |
| 4,5 | 42 | 45,094 |
| 5 | 42 | 45,569 |
| 5,5 | 41 | 46,007 |
| 6 | 41 | 46,429 |
| 6,5 | 41 | 46,883 |
| 7 | 40 | 47,31 |
| 7,5 | 40 | 47,739 |
| 8 | 40 | 48,163 |
| 8,5 | 40 | 48,597 |
| 9 | 40 | 48,996 |
| 9,5 | 40 | 49,425 |
| 10 | 39 | 49,83 |

Dochádzame k dôsledku, že s rastúcou výškou treba znižovať uhol. To intuitívne dáva zmysel, nakoľko čas, ktorý je loptička vo vzduchu, sa predlžuje vďaka dodatočnej výške, a teda uhol môžeme zmenšiť v prospech vyššej rýchlosti.

Pre tých, ktorých by zaujímalo

$$0 = 20\cos\alpha\left(\frac{13{,}025\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{40{,}7886\sin^2\alpha + 2h_0}} + 2{,}039\,43\cos\alpha\right) - 20\sin\alpha\left(0{,}319\,33\sqrt{40{,}7886\sin^2\alpha + 2h_0} + 2{,}039\,43\sin\alpha\right)$$

je implicitne daná funkcia, ktorá by popisovala náš problém. Ako isto vidno, vyjadriť $\alpha$ v závislosti od $h_0$ nie je sranda, a preto to robiť nebudeme.

## 3.4 Odporový vrh

vzorák **M&M**, opravoval **Danko**

### Teoretické minimum

Aké sily pôsobia na loptičku počas šikmého vrhu? Okrem pôvodného počiatočného pôsobenia od vrhateľa pôsobí iba gravitačná sila a odporová sila. Pričom odporová sila má smer vždy proti smeru pohybu loptičky a veľkosť danú známym vzorcom

$$-F_o = \frac{1}{2} C S \varrho \vec{v}^{\,2}$$

kde $C$ je koeficient aerodynamického odporu, $S$ je čelný prierez telesa vzhľadom na smer pohybu, $\varrho$ je hustota prostredia a $\vec{v}$ je vektor rýchlosti. Je možné si všimnúť, že počítať sa nám s touto rýchlosťou musí ťažko, lebo sa mení počas letu. Preto je vhodné rovno začať s experimentami, t.j. simuláciami.

**Experiment 1**

Keďže nám loptička bude spomaľovať počas letu, dáva zmysel mať elevačný uhol menší ako 45°. Taktiež budeme ukazovať tabuľky ako spôsob hľadania optimálneho uhla pri jednotlivých nastaveniach. Samozrejme uvedomujeme si, že všetky možné nastavenia sa nedajú vyskúšať, a preto uvažujeme iba niektoré hodnoty, aby sme demonštrovali efekty, ktoré sledujeme.

Pri hodnotách $v = 20$, $C = 0{,}47$, $r = 0{,}2$, $\varrho = 1{,}2$ nám vyšla nasledujúca tabuľka:

| Uhol $\alpha$ | Vzdialenosť $x$ |
|---|---|
| 40 | 38,266 |
| 41 | 38,438 |
| 42 | 38,578 |
| 43 | 38,683 |
| 44 | 38,725 |
| 45 | 38,734 |
| 46 | 38,707 |
| 47 | 38,595 |
| 48 | 38,474 |
| 49 | 38,294 |
| 50 | 38,080 |

Z nej môžeme usúdiť, že efekt spomalenia je signifikantný, ale nie natoľko, aby ovplyvnil uhol. Treba si všimnúť, že uhly menšie ako 45° majú väčšie vzdialenosti ako uhly väčšie ako 45°. To teda potvrdzuje našu hypotézu, že nižšie uhly budú trochu optimálnejšie. Preto je pre Krtka lepšie, ak podhodnotí svoj uhol ako by ho nadhodnotil. Môžeme sa zamyslieť, že keby sme mali vyššiu rýchlosť projektilu, tiež by sme dostali väčší posun. Toto je spôsobené hlavne faktorom $v^2$ v rovnici odporu.

**Experiment 2**

Ako sme už spomenuli, odporová sila záleží od hustoty vzduchu, čelného prierezu a aerodynamických vlastností. Všetky tieto čísla sú v priamej úmere. No keď si spomenieme na sily, tak vieme, že v nich hrá rolu aj hmotnosť. Ako to, že v tejto rovnici hmotnosť nevystupuje? No ak chceme len hmotnosť, aby nám sedel rozmer, tak ten dostaneme z hustoty prostredia. Ale samotný pohyb a zrýchlenie telesa sa správa podľa vzorca $F = m \cdot a$, a preto keď chceme popisovať rovnice pohybu, tak hmotnosť sa prejaví v nepriamej úmere. T.j. väčšia hmotnosť ďalej doletí. Čo sa týka vplyvu gravitácie na pohyb telesa, ten hmotnosťou nie je ovplyvnený. A ani ostatnými veličinami, iba gravitačným zrýchlením.

Pri hodnotách $v = 20$, $C = 0{,}47$, $r = 0{,}2$, $\varrho = 10$ nám vyšla nasledujúca tabuľka

| Uhol $\alpha$ | Vzdialenosť $x$ |
|---|---|
| 40 | 28,814 |
| 41 | 28,860 |
| 42 | 28,883 |
| 43 | 28,884 |
| 44 | 28,843 |
| 45 | 28,736 |

Zjavne sa optimálny uhol posunul niekde medzi 42 a 43 stupňov.

Pri hodnotách $v = 20$, $C = 0{,}47$, $r = 1$, $\varrho = 1{,}2$ nám vyšla nasledujúca tabuľka

| Uhol $\alpha$ | Vzdialenosť $x$ |
|---|---|
| 36 | 21,848 |
| 37 | 21,882 |
| 38 | 21,891 |
| 39 | 21,884 |
| 40 | 21,862 |
| 41 | 21,816 |
| 42 | 21,745 |
| 43 | 21,669 |
| 44 | 21,570 |
| 45 | 21,456 |

Zjavne sa optimálny uhol posunul niekde do okolia 38 stupňov.

Pri hodnotách $v = 20$, $C = 0{,}47$, $r = 0{,}2$, $\varrho = 1{,}2$ nám vyšla nasledujúca tabuľka

| Uhol $\alpha$ | Vzdialenosť $x$ |
|---|---|
| 40 | 33,082 |
| 41 | 33,172 |
| 42 | 33,236 |
| 43 | 33,271 |
| 44 | 33,279 |

| Uhol $\alpha$ | Vzdialenosť $x$ |
|---|---|
| 45 | 33,237 |

Zjavne sa optimálny uhol posunul niekde do okolia 44 stupňov.

Rozdielne optimálne uhly sú preto, lebo inými koeficientami ovplyvňujeme súčin $CS\varrho$. V prvom pokuse sme zväčšili odpor vzduchu 8,3-násobne, v treťom 4-násobne. V druhom (pozor!) sme síce zväčšili polomer 5-násobne, ale plocha sa zväčšila až 25-násobne, preto máme najväčší efekt.

Uvažujme teraz hmotnosť.

Pri hodnotách $v = 20$, $C = 0{,}2$, $r = 0{,}2$, $\varrho = 1{,}2$, $m = 80$ nám vyšla nasledujúca tabuľka

| Uhol $\alpha$ | Vzdialenosť $x$ |
|---|---|
| 40 | 39,691 |
| 41 | 39,906 |
| 42 | 40,084 |
| 43 | 40,197 |
| 44 | 40,273 |
| 45 | 40,285 |

Maximum sa zjavne nepohlo od 45 stupňov moc ďaleko. Ba dokonca menej ako pri $m = 20$, a teda naša teória je potvrdená.

Už len sa pozrieť na gravitáciu. Pri hodnotách $v = 20$, $C = 0{,}2$, $r = 0{,}2$, $\varrho = 1{,}2$, $m = 20$, $g = 20$ nám vyšla nasledujúca tabuľka

| Uhol $\alpha$ | Vzdialenosť $x$ |
|---|---|
| 40 | 19,272 |
| 41 | 19,368 |
| 42 | 19,446 |
| 43 | 19,506 |
| 44 | 19,521 |
| 45 | 19,546 |

Tentokrát je gravitácia silnejším faktorom dopadu loptičky ako odpor vzduchu, preto je efekt spomalenia na základe odporu vzduchu skoro zanedbateľný. Ešte uvedieme vzdialenosť bez odporu vzduchu pre $g = 20$ a $\alpha = 45°$:

| Uhol $\alpha$ | Vzdialenosť $x$ |
|---|---|
| 45 | 20,053 |

## 3.5 Balistika

vzorák **M&M**, opravoval **Danko**

Ako sme videli vo vzorovom riešení úlohy 3, rýchlosť sa dá rozložiť na $x$-ovú a $y$-ovú zložku a najmenšia celková rýchlosť bude vtedy, keď $y$-ová je nulová. To platí pre pohyb bez odporu. Ak sa pozeráme na dané počiatočné uhly a rýchlosti, potom najmenšia rýchlosť na trajektórií bude na vrchu paraboly. Tu však máme viac stupňov voľnosti, a preto to bude trochu o niečom inom.

Zapneme odpor vzduchu, a majme hodnoty $g = 9{,}806\,65$, $m = 20$, $x = y = 0$, $C = 0{,}47$, $r = 0{,}2$, $\varrho = 1{,}2$, krok = 0,01.

| Uhol $\alpha$ | Rýchlosť vrhu $v_0$ | Rýchlosť zásahu $v_1$ |
|---|---|---|
| 44 | 20,9 | 14,577 |
| 45 | 20,6 | 14,23 |
| 46 | 20,4 | 13,979 |
| 48 | 20,2 | 13,4637 |
| 48 | 20 | 13,405 |
| 49 | 19,9 | 13,212 |
| 50 | 19,8 | 13,065 |
| 51 | 19,65 | 12,908 |
| 52 | 19,55 | 12,84 |
| 53 | 19,50 | 12,74 |
| 54 | 19,45 | 12,69 |
| 55 | 19,45 | 12,66 |
| 56 | 19,45 | 12,61 |
| 57 | 19,45 | 12,72 |
| 58 | 19,5 | 12,79 |

Pri vyšších uhloch sa už ťažko rozlišuje, či projektil vskutku trafil holuba alebo nie. Preto pre nepresnosti v úsudku uzavrieme toto meranie, že optimum je niekde medzi 54 a 57 stupňov.