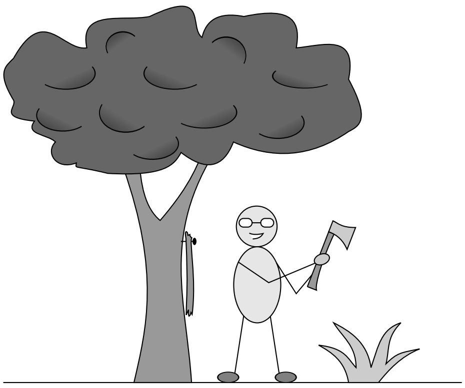
Riešenia 2. série letnej časti

2.1 Papek

Marek sa po poslednej prechádzke v lese začal hrať s papekmi. Pripevnil koniec krátkeho konára v lese na klinec, tak, že sa mohol okolo neho otáčať. Konár sa následne udomácnil v rovnovážnej polohe (čiže len tak zvislo visel).

Následne Marek do konára jemne drgol (konár sa nevychýlil veľmi) a tým sa konár začal pravidelne pohybovať okolo rovnovážnej polohy. Marek odmeral čas, ktorý konáru trvá, kým sa dostane z rovnovážnej polohy opäť do rovnovážnej polohy. Následne začal z konára postupne odlamovať, čím sa začal meniť aj čas, ktorý konáru trvá, kým prekmitne okolo rovnovážnej polohy.

Vyhliadnite si vo svojom okolí konár alebo niečo jemu tvarom podobné a odmerajte, ako závisí čas prekmitnutia okolo rovnovážnej (zvislej) polohy od dĺžky konára.



Každého fyzika musí po prečítaní zadania trknúť, že Marek si postavil *kyvadlo*. Nejedná sa však o obyčajné kyvadlo, s akým sa môžete stretnúť napríklad na hodinách fyziky. Konár Marekovho kyvadla slúži ako záves a zároveň ako závažie, ktoré na závese kmitá.

Naopak, pre klasické (matematické) kyvadlo platí, že závažie je malé (ideálne bodové) a hmotnosť závesu je oproti závažiu zanedbateľná (ideálne nulová). Pre periódu[1] T_m matematického kyvadla platí jednoduchý vzťah, ktorá závisí len na dĺžke závesu l a tiažovom zrýchlení g:

$$T_\mathrm{m} = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

Môžeme si všimnúť, že perióda nezávisí na hmotnosti závažia a je úmerná odmocnine z dĺžky závesu.

Z dôvodu, že Marekovo kyvadlo má hmotnosť rozloženú iným spôsobom, ako matematické kyvadlo, môžeme usúdiť, že jeho doba kyvu bude iná, ako čas $T_\mathrm{m}/2$. Ak začneme konár skracovať, budeme tým meniť nielen len dĺžku „závesu“, ale zároveň aj hmotnosť „závažia“. Predpovedať, ako sa pri tejto operácii bude meniť doba kyvu, je preto komplikovaná záležitosť. Dúfajme preto, že samotné meranie nám prinesie viac informácií.

Zmerať dobu kmitu (hocijakého) kyvadla nie je vôbec náročné. Ako sa píše v zadaní, kyvadlo najskôr zostrojíme. V našom prípade bola dobrým prototypom konáru drevená špajdľa, ktorá je rovná, má homogénne

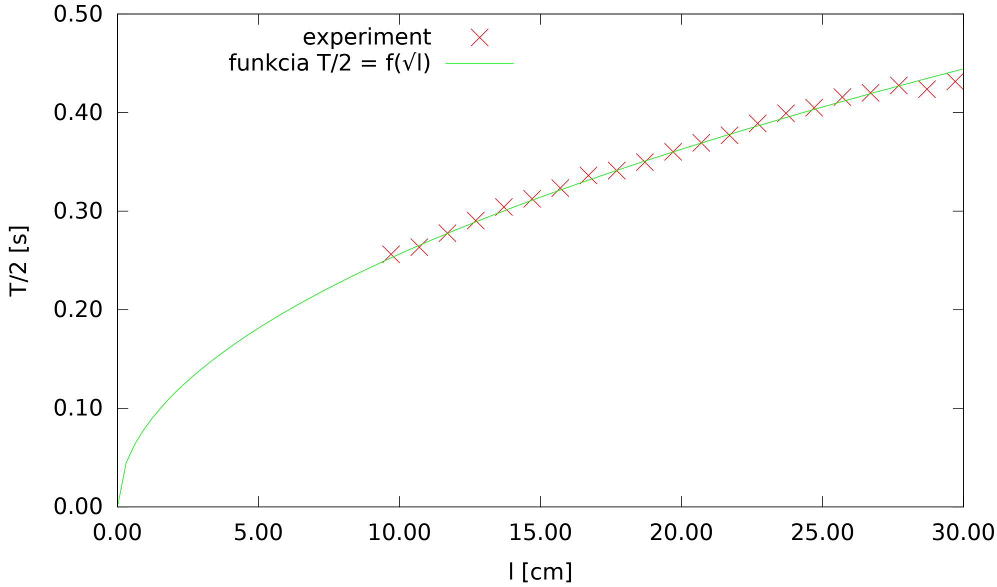
[1] Perióda je čas medzi dvomi po sebe nasledujúcimi návratmi kyvadla do tej istej krajnej polohy (teda doba jedného *kmitu*). V zadaní nás zaujíma ale doba medzi dvomi prekmitnutiami cez rovnovážnu, tzn. zvislú polohu, ktorej hovoríme jeden *kyv*. Doba jedného kyvu je polovičná oproti perióde, preto ju ďalej vo vzoráku budeme označovať ako $T/2$.

rozloženú hmotu a ľahko sa meria a skracuje. Následne kyvadlo trochu vychýlime (o uhol približne 10°) a sledujeme, ako kyvadlo kmitá. Odmerať dĺžku jedného kmitu je teoreticky možné, no veľmi nepraktické. Okom totiž len ťažko odhadneme, kedy presne kyvadlo dosiahlo maximálnu výchylku. Naviac meranie je ovplyvnené pomerne veľkou reakčnou dobou človeka (0,2 s až 0,4 s), čo je nepresnosť porovnateľná so samotnou dobou jedného kmitu.

Vylepšenie, ktoré výrazne zmenší obe spomínané chyby, je meranie doby niekoľkých kmitov. V našom prípade sme merali dobu vždy 20 kmitov, takže dobu jedného kyvu $T/2$ sme získali vydelením nameraného času štyridsiatimi. Meranie sme opakovali pre špajdľu, ktorej pôvodnú dĺžku 29,7 cm (vzdialenosť od osi otáčania) sme skracovali o 1 cm až na dĺžku 9,7 cm.

Namerané hodnoty časov $20T$ (doba 20 kmitov), ako aj doby jedného kyvu $T/2$ v závislosti na dĺžke l špajdle uvádzame v tabuľke. Naviac sme do predposledného stĺpca tabuľky vypočítali odpovedajúcu dobu kyvu matematického kyvadla $T_\mathrm{m}/2$ a v poslednom stĺpci tabuľky sme vypočítali pomer týchto dôb T/T_m. Naviac sme dobu kyvu $T/2$ vyniesli do grafu v závislosti na dĺžke špajdle l.

l [cm]	$20T$ [s]	$T/2$ [s]	$T_\mathrm{m}/2$ [s]	T / T_m$
29,7	17,3	0,432	0,547	0,79
28,7	17,0	0,424	0,537	0,79
27,7	17,1	0,428	0,528	0,81
26,7	16,8	0,420	0,518	0,81
25,7	16,6	0,416	0,508	0,82
24,7	16,2	0,405	0,498	0,81
23,7	16,0	0,399	0,488	0,82
22,7	15,6	0,389	0,478	0,81
21,7	15,1	0,377	0,467	0,81
20,7	14,8	0,369	0,456	0,81
19,7	14,4	0,360	0,445	0,81
18,7	14,0	0,350	0,434	0,81
17,7	13,7	0,341	0,422	0,81
16,7	13,5	0,336	0,410	0,82
15,7	12,9	0,324	0,397	0,81
14,7	12,5	0,313	0,385	0,81
13,7	12,2	0,304	0,371	0,82
12,7	11,6	0,291	0,357	0,81
11,7	11,1	0,278	0,343	0,81
10,7	10,5	0,264	0,328	0,80
9,7	10,3	0,256	0,312	0,82



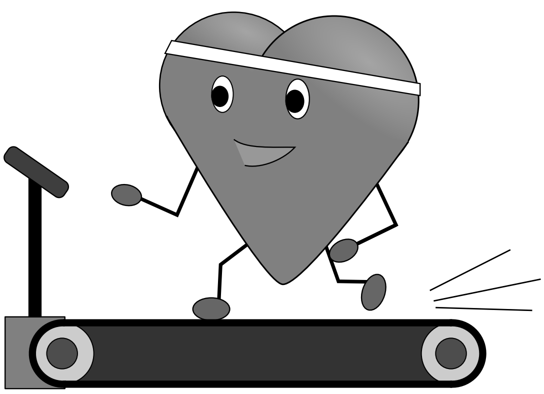
Obrázok 1: *Graf závislosti $T/2$ od l*

Z tabuľky si môžeme všimnúť jednu zaujímavú vec: pomer T/T_m sa s meniacou dĺžkou (v rámci nepresnosti merania) nemení. To ale znamená, že pre vzťah pre dobu T platí $T = kT_\mathrm{m}$, kde k práve zmeraný pomer. Inými slovami, už teraz vieme povedať, že doba jedného kyvu Marekovho konára závisí, rovnako ako v prípade matematického kyvadla, na odmocnine z dĺžky konára. Túto závislosť môžeme s trochou predstavivosti vidieť aj v grafe. Pre väčšiu predstavivosť sme namerané dáta naozaj preložili (správne naškálovanou) funkciou $T/2 = f(\sqrt{l})$.

Vo vyšších ročníkoch, na sústredku FKS alebo na sústredení fyzikálnej olympiády sa určite naučíte, že perióda Marekovho kyvadla sa dá zistiť aj teoreticky, práve pre prípad kmitajúcej homogénnej paličky. Presne ako v experimente zistíme, že pomer T/T_m je konštantný a rovný $\sqrt{2/3} \doteq 0{,}82$. Zhoda s experimentom je teda perfektná. Na záver len dodajme, že iné výsledky by sme dostali, ak by sme experiment uskutočnili s reálnym konárom, ktoré má, narozdiel od špajle, hmotu rozloženú vzhľadom k osi otáčania ešte komplikovanejšie.

2.2 Srdečná

Odhadnite, koľkokrát za deň Čajke bije srdce. Nezabudnite, že pri vyššej fyzickej aktivite alebo strese Čajke bije srdce rýchlejšie. Prípadne to skúste odmerať. Porovnajte svoj výsledok s osobou vo svojom okolí (nech to odhadne aj pre iného človeka).



Odpočívajúca Čajka

Predstavme si najskôr, že Čajke bije srdce celý čas rovnomerne, tempom *priemerného* ľudského srdca.

Na internetových zdrojoch[2] si vieme nájsť, že *priemerne* človeku bije srdce 70-krát za minútu. Tak zoberme si úplne základný odhad, že takto bije Čajke srdce celý deň. Ten má $24 \cdot 60 = 1440$ minút, čo je dokopy $1440 \cdot 70 = 100800$ odbití srdca.

Lenže, Čajka počas jedného dňa spí, športuje, tancuje, stresuje sa, atď. A tým pádom musíme zobrať do úvahy tieto faktory.

Spiaca Čajka

Povedzme, že Čajka spí 7 hodín denne. Opäť na internetoch[3] nájdeme, že pri spánku bije srdce 52 až 64 krát za minútu. Budeme počítať s priemerným tepom, teda 60 krát za minútu. Keby Čajka len spala a odpočívala, tak by počet odbití srdca bol

$$\text{počet hodín spánku} \cdot \text{minút v hodine} \cdot \text{pulz v spánku} + \text{počet hodín bdenia} \cdot \text{minút v hodine} \cdot \text{pulz v pokoji}.$$

A teda keď to vyčíslime:

$$7 \cdot 60 \cdot 60 + 17 \cdot 60 \cdot 70 = 96600.$$

Športujúca Čajka

Podľa ďalších zdrojov[4] stúpa pulz pri cvičení až po 200 úderov za minútu. Ak by Čajka športovala 1 hodinu denne, tak by počet úderov jej srdca bol

$$220 - \text{vek},$$

pričom priemer je 60 až 80 percent z tohto čísla. Povedzme, že 70 percent a rátajme so 140 údermi za minútu:

Ak by Čajka športovala 1 hodinu denne, tak by počet úderov jej srdca bol

$$1 \cdot 60 \cdot 140 + 16 \cdot 60 \cdot 70 + 7 \cdot 60 \cdot 60 = 100800.$$

Chodiaca Čajka

Tieto výpočty sa opierali o to, že keď Čajka nespí a nešportuje odychuje. Lenže Čajka počas dňa napríklad aj chodí (napríklad do školy :)). Podľa internetov[5] spraví človek päť až desaťtisíc krokov za deň. Čajka je stvorenie aktívne a tancujúce (čo sa už zohľadnilo v športovaní) a tak odhadnime, že prekráča 9000 krokov za deň. Podľa českej wikipédie[6] je priemerná rýchlosť chôdze 5 km/h. Jeden krok je[7] priemerne 0,792 48 m, čo je 0,000 792 48 km.

Potom za jeden deň Čajka prekráča $0.00079248 \cdot 9000 = 7{,}132\ 32$ km, čo je, ak kráča priemernou rýchlosťou chôdze, $\frac{7.13232}{5} = 1{,}426\ 464$ h. Tento čas zaokrúhlime na 1,4 h.

[2] https://cs.wikipedia.org/wiki/Srdce, https://cs.wikipedia.org/wiki/Puls_%28tep%29
[3] http://www.livestrong.com/article/105256-normal-heart-rate-sleeping/
[4] http://www.livestrong.com/article/389626-what-are-normal-pulse-rates-when-exercising/
[5] http://walking.about.com/od/measure/a/averagesteps.htm
[6] https://cs.wikipedia.org/wiki/Ch%C5%AFze
[7] http://www.livestrong.com/article/438170-the-average-walking-stride-length/

A už nám len ostáva zistiť, ako rýchlo bije srdce počas kráčania. Našla som,[8] že počas kráčania sa pulz pohybuje medzi 60 a 100. Použijem priemernú hodnotu (80) a už len spočítam, koľko úderov za deň to vyjde teraz

$$1 \cdot 60 \cdot 140 + 14.6 \cdot 60 \cdot 70 + 7 \cdot 60 \cdot 60 + 1.4 \cdot 60 \cdot 80 = 101640.$$

Máme tak približný výsledok, že Čajkino srdce bije za deň 101640 krát.

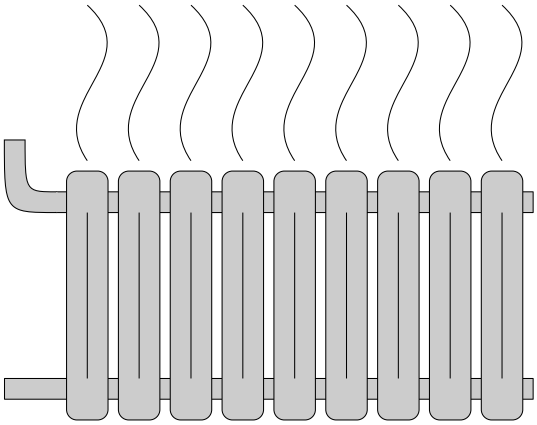
Čiže sme dostali výsledok nie veľmi vzdialený od toho pôvodného.

Ako ste si všimli, táto úloha nebola vôbec náročná a jej cieľom bolo naučiť vás vhodne pracovať so zdrojmi informácií. To znamená, že hodnotiť budeme nie len to, či ste zvážili viacero faktorov, ktoré ovpyvňujú bytie srdca, ale aj to, či ste svoje hodnoty podložili uvedenými zdrojmi ;)

2.3 Konšpirátor

vzorák **Zuzka**, opravoval **Zuzka**

Kubo prednedávnom narazil na blog ďalšieho konšpirátora. Ten sa pozastavil nad týmto pozorovaním. Všimol si, že v zime stúpajúci a prúdiaci vzduch z radiátora rozochvieva obraz predmetov, ktoré cezeň pozorujeme. Uvedomil si však tiež, že keď vonku fúka vietor, nič také nepozorujeme, a tak rovno prehlásil, že v škole nám len vymývajú mozgy. Ako je teda možné, že raz prúdiaci vzduch spôsobuje rozochvievanie obrazu predmetov ležiacich za ním a inokedy zase nie?



Ako by sa dalo predpokladať, naša úloha bude vyžadovať hlbšie zamyslenie sa, než „toto je prúdiaci vzduch aj toto je prúdiaci vzduch, takže pozorovaný jav je založený určite práve na prúdení vzduchu a nie na niečom inom."

Ak to teda nie je prúdiaci vzduch, čo majú skúmané dva prípady spoločné? Chceme zistiť, prečo vidíme veci tak, ako ich vidíme. Naše zrakové ústrojenstvo vníma predmety, ktoré sa nachádzajú za radiátorom, resp. priestorom, v ktorom fúka vietor, na základe svetelných lúčov, ktoré sa od nich odrážajú a putujú cez okolité prostredie do nášho oka. Teda musia prejsť ponad radiátor alebo cez priestor, v ktorom fúka vietor. Na základe vlastností prostredia, cez ktoré svetelné lúče prechádzajú, sa môžu ohýbať a lámať, teda vastnosti prostredia dokážu ovplyvniť nami vnímaný obraz. Dá sa tento vplyv nejako kvantifikovať? Dá.

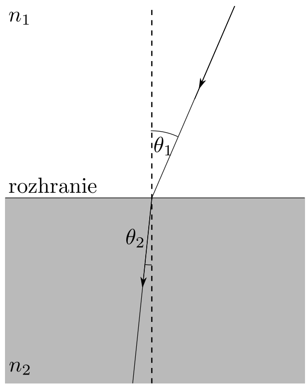
Pozrime sa bližšie na index lomu. Je to bezrozmerná veličina, ktorá charakterizuje prechod svetla cez jednotlivé materiály definovaná ako podiel rýchlosti svetla vo vákuu a rýchlosti svetla v skúmanom médiu. Teda čím pomalšie sa svetlu cez niečo prechádza, tým väčší index lomu bude daný materiál mať.

Keď svetlo prechádza z jedného materiálu do druhého s rôznymi indexami lomu, odchýli sa od svojej pôvodnej dráhy. To, o aký uhol sa odchýli, určuje pomer indexov lomu látok, cez ktoré prechádza. Hovorí sa tomu inak Snellov zákon.

[8] http://www.livestrong.com/article/401591-normal-heart-rate-when-walking/

$$n = \frac{c}{v}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{sin\theta_2}{sin\theta_1}$$



Obrázok 2: *Snellov zákon*

Index lomu vzduchu závisí od mnohých faktorov, a to hlavne od teploty. Čím je vzduch teplejší, tým je jeho index lomu bližší jednotke, teda jeho vlastnosti sa s rastúcou teplotou blížia vlastnostiam vákua (čo sa prechodu svetla týka). Presný kvantitatívny opis je pomerne náročný a jeho vysvetľovaním by sme zaplnili niekoľko strán. Preto ho nebudeme uvádzať. Nakoniec ho vlastne ani nepotrebujeme.

Čo spraví so vzduchom radiátor? Ohreje ho. Vzduch je teda ľahší (má menšiu hustotu) ako studený vzduch okolo, preto začne od radiátora stúpať a nepravidelne sa premiešavať so studeným vzduchom. Teplota vzduchu nad radiátorom sa mreto miesto od miesta mení. Čo robí chudák svetlo, keď prechádza takouto masou vzduchu, ktorá má na rôznych miestach zakaždým iný index lomu? Musí sa ohýbať ako Neo pred rojom guliek[9]. Hovoríme totiž o prudkých zmenách vlastností vzduchu v relatívne malom objeme. Môžeme s pokojným svedomím povedať, že každý lúč odrazený od skúmaného predmetu si prešiel inou sériou rôzne ohriatych vzduchových más. Keďže sa tento stupeň ohriatia mení aj v čase, keď sa na predmet za radiátorom pozeráme, zdá sa nám, že obraz sa chveje.

Na druhej strane, keď sa pozrieme na vietor, ten je spôsobený pohybom vzduchových más účinkom meteorologických zmien v oveľa väčšom merítku, ako je radiátor. Teplota vzduchu, ktorý tvorí vietor, sa mení omnoho menej ako teplota vzduchu nad radiátorom. Nemení sa teda ani jeho index lomu a predmety sa za veterného dňa nechvejú (ak nie je zrovna víchrica – vtedy sa niektoré predmety pohybujú oveľa viac, ako vplyvom teplého vzduchu nad radiátorom).

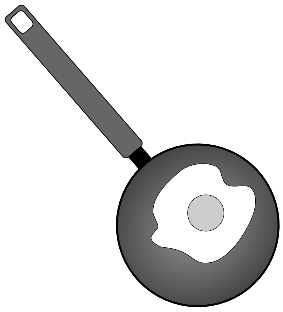
Avšak, podaktorí z vás sa môžu diviť, prečo v noci vidíme hviezdy poblikávať? Tento jav tiež musí byť spôsobený atmosférou, o ktorej sme si práve povedali, že svetlo neohýba! Nuž, ak uvážime, že hviezdne svetlo muselo preniknúť celou atmosférou deliacou zemský povrch od vesmíru, určite nemôžeme považovať jej teplotu v celom objeme za konštantnú. V takomto veľkom merítku vie teda vietor ovplyvniť obraz pozorovaných hviezd tak, že premiešava masy rôzne teplého vzduchu.

Záver: Konšpirátorom chýba schopnosť sa hlbšie kriticky zamyslieť alebo si aspoň vyhľadať a overiť zdroje informácií. Nebuďte ako konšpirátori.

[9] Dúfam, že ste videli Matrix.

2.4 Katka varí obed

Môže sa nám stať, že keď si Katka varí obed, tak sa jej podarí mať na panvici, ktorá je udržiavaná na konštantnej teplote, objekt teplejší, ako je sama panvica? Objekt bol na panvici od okamihu, keď sme začali panvicu ohrievať.



Poďme sa pozrieť, akým spôsobom sa šíri teplo. Teplo sa môže šíriť vedením, prúdením a žiarením. V našom prípade sa teplo prenáša len vedením tepla medzi panvicou a obedom, poprípade žiarením. Vieme, že vedenie je tepla funguje tak, že teplejšie teleso zohrieva chladnejšie teleso. Teda vedením tepla určite nemôže nastať, že by panvica bola chladnejšia ako na nej pripravovaný obed. Čo ale prenos tepla žiarením? Žiarenie predsa zohrieva teleso, nech je akokoľvek teplé, teda teoreticky by mohlo pomocou žiarenia studenšie teleso zohriať teplejšie. Aby sme boli presní, studenšie teleso naozaj dodáva teplo telesu teplejšiemu žiarením, no teplejšie teleso tiež vyžaruje teplo a vyžaruje ho viacej, ako ho prijíma od chladnejšieho telesa. Teraz už vidíme, že panvica nemôže zohriať obed na teplotu vyššiu, ako má samotná panvica.

2.5 Concorde

O koľko najviac dlhší západ Slnka môžem pozorovať, ak budem letieť v Concorde?

Najprv si zistíme údaje o lietadlách Concorde. Medzi letovou rýchlostou 2 179 km/h, letovou výškou 18 km nájdeme taktiež údaje o maximálnej letovej výške, počte vyrobených kusov či maximálnej rýchlosti. Tieto údaje nám buď sú k ničomu alebo len skomplikujú úlohu na hľadanie vhodnej kombinácie výšky a rýchlosti. Takže si vystačíme s týmito dvoma informáciami.

Zavedieme si novú veličinu: *uhlovú rýchlosť*, ktorá zodpovedá tomu, ako rýchlo sa skúmaná vec otáča okolo nejakej osi. Pre Zem je to teda jedna otočka $(2 \cdot \pi)$ za 86 400 s $= 0{,}24\,\mathrm{rad/h}$. Treba si uvedomiť, že v tomto prípade nezáleží na polomere.

Keď sa ale pozeráme na Concorde, poznáme iba jeho *obvodovú* rýchlosť. To ale nie je žiadny problém: čas, za ktorý obletí Concorde zem, je $2\pi\frac{(R+h)}{v}$, kde R je polomer zeme, h je letová výška a v je letová rýchlosť. Potom uhlová rýchlosť je celý uhol/čas, teda $\frac{v}{R+h} = 0{,}34\,\mathrm{rad/h}$.

Vidíme, že uhlová rýchlosť Concordu je vyššia ako uhlová rýchlosť Zeme. To znamená len jediné: môžeme sedieť v Concorde, pokojne ho aj spomaliť, a pozerať sa na romantický západ, až kým nám nedôjde palivo :)