Riešenia 3. série letnej časti

3.1 Hustá makovica

Enka má ešte stále rada mak. Tentokrát by od Vás chcela, aby ste odmerali hustotu maku.

Ako všetci vieme, hustota je definovaná ako $\rho = m/V$, kde m je hmotnosť a V objem. Hustotu jedného zrnka teda vieme vypočítať ako jeho hmotnosť delenú jeho objemom (aspoň teoreticky ;)). V piatom príklade prvej série sa nám už podarilo úspešne zistiť, že hmotnosť jedného zrnka je približne 0,004 g. Ak sa pozrieme na zrnko maku veľmi zjednodušene, mohli by sme si ho predstavovať ako guľu s polomerom R. Objem gule hravo vypočítame ako $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (znalci sa s týmto vzťahom už isto stretli). Stačí už len zistiť, aký má zrnko polomer. Problém však je, že táto hodnota líši od zrnka k zrnku.

Na pravítku s dielikom 1 mm vieme pozorovať iba približný priemer zrnka, čo je asi $1{,}00 \pm 0{,}05\,\mathrm{mm}$. To znamená, že hustota je približne rovná

$$\frac{0{,}004\,\mathrm{g}}{\frac{4\pi}{3}\cdot(0{,}5\,\mathrm{mm})^3} \doteq 2{,}54\,\mathrm{g/ml}.$$

To je naozaj veľmi veľa, čo znamená, že musíme urobiť presnejšie meranie.

Zoberme teda naozaj veľké množstvo maku a ponorme ho do vody. Avšak tu vznikne taktiež problém. Mak pláva. Mnohí ste z toho hneď z usúdili, že mak menšiu hustotu ako voda. Mak by však na hladine mohol plávať, aj keby bol hustejší ako voda. Mak je totiž veľmi malý, a tak sa môže stať, že na hladine ho nedrží len vztlaková sila, ale aj povrchové napätie.[1]

Obrázok 1: *Mak pláva...*

[1] Skúste si napríklad na hladinu vody umiestniť kancelársku spinku či pripináčik. Naozaj to ide!

Povrchové napätie je vytvárané príťažlivými silami medzi molekulami vody. Ak sa molekula nachádza vnútri kvapaliny, má jednoducho povedané veľa susedov zo všetkých strán, a preto sa tieto sily kompenzujú. Ak je molekula na rozhraní kvapaliny a iného prostredia, napr. vzduchu, pociťuje efektívne väčšiu zložku sily v smere zvyšku kvapaliny, čím je táto molekula ťahaná ku kvapaline. Preto možno vidieť kvapky vody. Akonáhle je mak pod vodou, má to svedčiť o presnom opaku predpokladaného tvrdenia, že mak má menšiu hustotu ako voda.

Avšak iba experiment rozrieši tento problém. Na experiment budeme potrebovať váhy, mak, odmerný valec a mikroténový sáčok. Postup experimentu môže byť napríklad nasledujúci. Najprv navážime hmotnosť maku, potom nasypeme mak do sáčku, tak aby v sáčku zostalo čo najmenej vzduchu. Následne mak ponoríme do kvapaliny (úplne, zvyšok sáčku môže trčať nad vodou) a odmeriame rozdiel objemov, ktoré odčítame z odmerného valca. Meranie opakujeme viackrát, avšak pre inú hmotnosť maku v sáčku.

Obrázok 2: *Vytlačíme vzduch...*

Obrázok 3: *...a ponoríme sáčok pod hladinu*

Merania, ktoré vykonali vedúci:

meranie	m[g]	V_{voda}[ml]	$V_{\text{voda+mak}}$[ml]	hustota [gml^{-1}]	Δ
1	30	125	175	0,6	0,054 799
2	40	100	160	0,666 666 667	−0,011 87
3	20	75	110	0,571 428 571	0,083 37
4	10	75	90	0,666 666 667	−0,011 87
5	50	75	140	0,769 230 769	−0,114 43
				0,654 798 535	0,076 371

Experimentom sme teda zistili, že hustota maku je $0{,}654 \pm 0{,}076\,\mathrm{g/ml}$. Odchýlku vieme (kvalifikovane) odhadnúť pomôcou nasledujúceho vzorca pre smerodajnú odchýlku:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}{n-1}},$$

kde n je počet meraní, x_i je hodnota hustoty v i-tom meraní, $\bar{x}$ je priemerná hustota.

Merané hodnoty môžu byť ovplyvnené viacerými faktormi: napríklad vzduchom medzi zrnkami maku a taktiež inými materiálmi, napríklad igelitom, ich vplyv avšak oproti vplyvu vzduchu malý. Odhad množstva vzduchu vieme spraviť napríklad považovať mak za guľu a veľa maku za pravidelnú mriežku gúľ. Ale v rámci kuchynských meraní je dobré už len merať $0{,}654 \pm 0{,}076\,\mathrm{g/ml}$.

3.2 (R)evolučný pochod

Predstavme si, že Váš otec vošiel cez dvere do miestnosti normálnou rýchlosťou chôdze. Hneď za ním vošiel jeho otec (dĺžku kroku a rýchlosť chôdze odhadnite). Ako dlho musíme čakať, kým stvorenie, ktoré vošlo do miestnosti, je spoločný predok človeka a opice?

Dĺžka kroku je približne 1 m. Rýchlosť ľudskej chôdze je $4\,\mathrm{km/h}$. Z toho nám vychádza, že do miestnosti vojde nový človek každých 0,9 s. Predpokladajme, že vekový rozdiel medzi otcom a jeho synom je 20 rokov[2]. Ľahko sa dovtípime[3], že vývoj človeka a opice (šimpanza) sa oddelil pred zhruba 6,3 až 5,4 miliónmi rokov. Pre odhad nám teda bohate postačí približná hodnota 6000000 rokov. Počas tohoto odbobia sa vystriedalo teda nasledujúce množstvo generácií:

$$6000000 : 20 = 300000$$

Keďže nový človek/stvorenie vojde do miestnosti každých 0,9 s, vypočítame si, ako dlho to bude trvať 300000 stvoreniam:

$$0{,}9 \cdot 300000 = 270\ 000\,\mathrm{s} = 75\,\mathrm{h}$$

Spoločný predok človeka a opice vojde do miestnosti po 75 hodinách čakania.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Generation_time
[3] https://cs.wikipedia.org/wiki/Hominini

3.3 A je to!

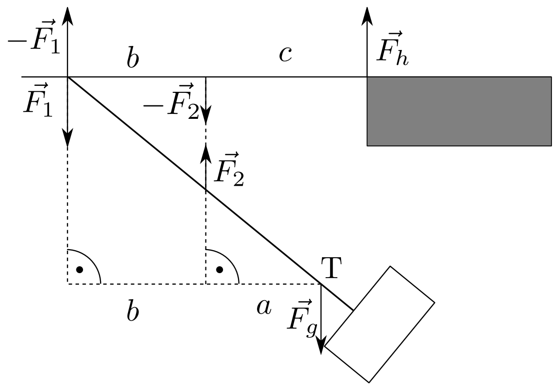
vzorák **Kebab**

Maťo narazil na internete na takéto video: https://www.youtube.com/watch?v=Hj-NX0xtcVY. Zaujímalo by ho, či je predvádzaný kúsok reálny alebo sa stal len obeťou…

Pokúste sa popísať všetky sily, ktoré pôsobia medzi gumou, pravítkom a kladivom. Na základe toho sa pokúste nájsť polohu ťažiska kladiva tak, aby bola sústava v rovnováhe. ***Hint: Moment síl pôsobiacich na pravítko musí byť nulový.***

Uvažujte, že guma drží kladivo v polovici jeho dĺžky a je uchytená o pravítko tiež v polovici jeho dĺžky. Hmotnosti gumy a pravítka sú zanedbateľné voči hmotnosti kladiva.

Na videu vidíme, že ťažisko je napravo od miesta uchytenia kladiva gumičkou (lebo je tam hlavica kladiva, ktorá je podstatne ťažšia ako rúčka). Teda keby sme kladivo nechali len tak visieť v polovici jeho dĺžky, začalo by padať/natáčať sa na tú ťažšiu stranu. Aby sa kladivo nehýbalo, ale bolo v polohe ako na videu, na druhej strane kladiva musí byť sila, ktorá bude vyvažovať tiažovú silu kladiva F_g v ťažisku. Na to tam je pravítko, ktoré pôsobí na kladivo silou F_1. Okrem toho pôsobí aj sila F_2, ktorá účinkuje v mieste uchytenia kladiva gumičkou a pôsobí smerom nahor.



Aby bolo kladivo v pokoji, musí platiť:

$$F_1 + F_g = F_2$$

Lenže okrem toho kladivo nesmie ani začať rotovať. To zistíme pomocou fyzikálnej veličiny momentu sily, ktorá vyjadruje mieru otáčavého účinku sily. Moment sily sa vzťahuje vzhľadom na ľubovoľný bod a je to veľkosť súčinu pôsobiacej sily a ramena (rameno je vzdialenosť vektorovej priamky sily a daného momentového bodu). Keď teleso nerotuje, platí, že súčet všetkých momentov síl je rovný nule.

Teda ak si určíme ako momentový bod ťažisko kladiva, momenty síl pôsobiace na kladivo sa musia rovnať nule. Z toho vyplýva:

$$0 \cdot F_g - T \cdot F_2 + (b + a) \cdot F_1 = 0$$

$$T \cdot F_2 = (b + a) \cdot F_1$$

Aby sa celá sústava nehýbala, musí byť v pokoji aj pravítko a teda aj sily a momenty síl, ktoré naňho pôsobia, sa musia rovnať. Keďže každá akcia vyvolá rovnako veľkú reakciu, ale opačného smeru (3. Newtonov zákon), na pravítko pôsobia sily $-F_1$, $-F_2$ a ešte aj normálová sila F_n, ktorá pôsobí na mieste hrany stola. Pravítko je v pokoji, teda platí:

$$F_1 + F_n = F_2$$

Aby nezačalo pravítko rotovať, musia byť momenty síl, ktoré naňho pôsobia, v rovnováhe. Čiže, ak si zoberieme miesto dotyku pravítka s hranou stola, platí:

$$0 \cdot F_n + c \cdot F_2 - (b + c) \cdot F_1 = 0$$

$$c \cdot F_2 = (b + c) \cdot F_1$$

Teraz dáme rovnice momentov síl pre kladivo a pravítko do pomeru:

$$\frac{a \cdot F_2}{c \cdot F_2} = \frac{(b + a) \cdot F_1}{(b + c) \cdot F_1}$$
$$\frac{a}{c} = \frac{b + a}{b + c}$$

Z čoho po úprave dostaneme

$$a = c.$$

Teda sústava je v pokoji, ak jej ťažisko je priamo pod okrajom stola. Všetky sily a momenty síl sú vyrovnané, teda sústava bude v pokoji a situácia, ktorú vidíme na videu, môže nastať. Ťažisko sústavy môže byť aj viac napravo (nie pod okrajom stola), pretože stačí, aby bolo stolom podopreté.

3.4 Lietajúce potvory

Guľa s objemom 1 liter letí vo vákuu dvakrát rýchlejšie ako kocka s objemom 4 litre. Ktoré teleso má väčšiu hustotu, ak obe majú rovnakú kinetickú energiu?

Hustota je veličina, ktorá vyjadruje, aká hmotnosť pripadá na jednotku objemu. Ak povieme, že hustota telesa je konštantná, prípadne, že hmotnosť telesa je rozložená homogénne, znamená to, že rovnako veľkým (objemným) častiam pripadá rovnaká hmotnosť. Ak teda rozdelíme teleso na n častí tak, aby mali všetky rovnaký objem, potom budú mať všetky tieto kúsky rovnakú hmotnosť. Predpokladajme, že guľa a kocka zo zadania takú hustotu majú. Hustotu telesa teda zistíme zo vzťahu

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Objemy telies poznáme. Ako však zistíme hmotnosť? V zadaní bolo povedané, že obe telesá majú rovnakú kinetickú energiu. Tu si musíme spomenúť na vzorček, pomocou ktorého tú kinetickú energiu vyjadríme

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2.$$

Spomeňme si aj na to, že guľa sa pohybuje dvakrát rýchlejšie ako kocka – to znamená, že $v_\text{guľa} = 2v_\text{kocka} = 2v$. Po dosadení dostávame

$$\frac{1}{2}m_\text{guľa}(2v)^2 = \frac{1}{2}m_\text{kocka}v^2.$$

Po vykrátení $\frac{1}{2}$ a v^2 dostaneme

$$4m_\text{guľa} = m_\text{kocka}.$$

Zistili sme, že kocka je štyrikrát ťažšia ako guľa. Síce nevieme akú hmotnosť majú jednotlivé telesá, vieme však ich pomer. A nakoľko otázka znie, ktoré teleso má väčšiu hustotu, pomer hmotností je dostatočný. Poďme teda jednotlivé hustoty porovnať:

$$\rho_\text{guľa} = \frac{m_\text{guľa}}{V_\text{guľa}} = \frac{m_\text{guľa}}{1\,\mathrm{l}}$$
$$\rho_\text{kocka} = \frac{4m_\text{guľa}}{V_\text{kocka}} = \frac{4m_\text{guľa}}{4\,\mathrm{l}} = \frac{m_\text{guľa}}{1\,\mathrm{l}}$$

Teda obe telesá majú rovnakú hustotu.

3.5 Obdobie dažďov

Keď naposledy vonku pršalo, Jarka sa opäť rozhodla vybrať si dáždnik. Začalo však fúkať. Dáždnik držala kolmo na vietor, pričom si ním kryla tvár. Prečo jej potom vlasy rozfúkava smerom k dáždniku? Veď keby pred sebou dáždnik nemala, tak sú rozfúkavané presne opačným smerom.

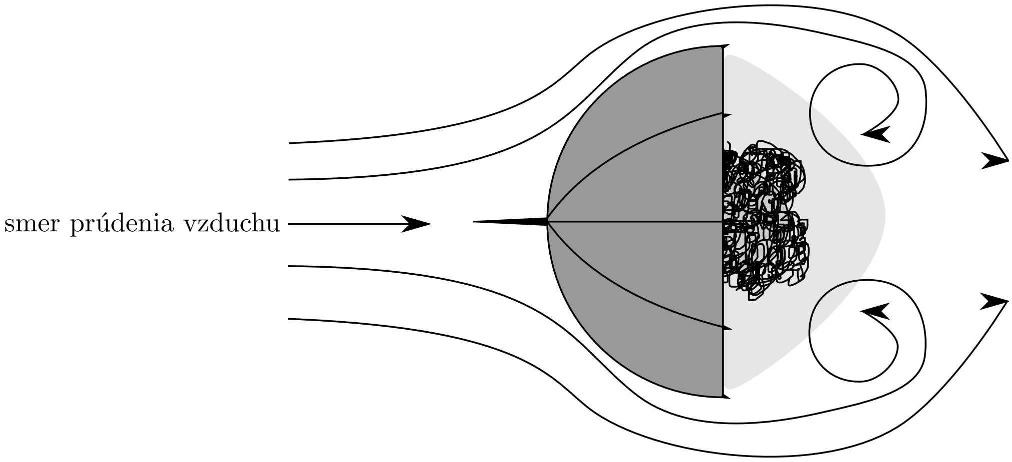
Situácia je nasledovná: Jarka kráča s dáždnikom pred sebou a proti jej pohybu fúka vietor. Čo je vietor? Prúdenie vzduchu. Čo je vzduch? Tekutina, teda látka, ktorá si nie je schopná udržať stály tvar. Pohyb takejto látky vieme znázorniť prúdnicami, čo sú myslené čiary, ktorých dotyčnica v ktoromkoľvek bode určuje smer rýchlosti prúdenia. Takéto prúdnice sa nikdy nepretínajú.

Pri pohybe tekutiny vzniká medzi jej časticami trenie, ktoré do istej miery tento pohyb brzdí. Toto trenie sa mení v objeme - keby sme si predstavili trubicu, v ktorej prúd nejaká tekutina, kvôli interakcii s trubicou pôsobí iné trenie na častice na kraji a na tie, ktoré sú v strede.

Keďže trenie medzi časticami závisí aj od rýchlosti prúdenia, budeme pri rôznych rýchlostiach pozorovať zmeny v prúdení. Pri malých rýchlostiach budeme pochopiteľne pozorovať menšie trenie a prúdenie v tomto prípade nazývame laminárne. Znamená to, že prúdnice sú pekné rovnobežné. Keď ale rýchlosť prúdenia zväčšíme, v istom momente si všimneme v dôsledku zväčšovania trenia tvorbu vírov v tekutine - takzvané turbulentné prúdenie.

Jarku s dáždnikom si môžeme predstaviť ako prekážku v prúdení tekutiny. Aby sme boli konkrétnejší, považujme Jarku s dáždnikom za pologuľu.

Teraz si predstavme, že náš vietor (rýchlo prúdiaca tekutina) narazí na Jarkin dáždnik. Jeden prúd tekutiny sa rozdelí na veľa menších, ktoré začnú prekážku obtekať. Akonáhle prídu na kraje dáždnika, začnú vyvíjať trenie na častice, ktoré sa nachádzajú za dáždnikom a strhávajú ich so sebou. Teda v malom priestore za dáždnikom, kde je vzduch prakticky v pokoji (na obrázku svetlosivá oblasť), sa vytvára blízko dáždnika podtlak kvôli „uleteným“ časticiam vzduchu. Tento podtlak začne vťahovať vzduch stade, skade je mu to najbližšie – teda zozadu. Takto vznikajú víry, ktoré vháňajú Jarke vzduch odzadu dopredu, preto jej vlasy fúka smerom do tváre.



Obrázok 4: *Jarka v daždi*