Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Kráľovská jednotka

vzorák **Kebab**, opravoval **Kubo H.**

Najprv si spíšeme, čo máme napísané v zadaní.

$$1\ \mathrm{H} = 240\ \mathrm{g},$$
$$1\ \mathrm{Ds} = 18\ \mathrm{Pa},$$
$$1\ \mathrm{Vn} = 6\ \mathrm{min},$$
$$1\ \mathrm{a} = 100\ \mathrm{m}^2 = ?$$

Pri prvom pohľade na tieto vzťahy si možno myslíte, že meter predsa nemá nič spoločné s jednotkami g, Pa, min a teda ani s naším novým systémom jednotiek H, Ds, Vn. Pozrime sa však, čomu sa rovná 1 Pa v SI[1] jednotkách. Vieme, že tlak možno vypočítať ako silu pôsobiacu na plochu, čiže takto:

$$p = \frac{F}{S}.$$

V jednotkách to možno zapísať ako

$$\mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}.$$

Keďže silu vieme vypočítať ako hmotnosť krát zrýchlenie $F = ma$, Newton je rovný

$$\mathrm{N} = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Tento vzťah si dosadíme do rovnice pre výpočet tlaku, čím dostávame

$$\mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{m}^2},$$
$$\mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2},$$

z čoho si ľahko vyjadríme ár ako

$$\mathrm{m} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}^2},$$
$$\mathrm{m}^2 = \frac{\mathrm{kg}^2}{\mathrm{Pa}^2\cdot\mathrm{s}^4},$$

[1] Všetky jednotky, ktoré poznáš, sa dajú zapísať pomocou siedmich základných: meter, kilogram, sekunda, kelvin, ampér, mól a kandela, ktoré tvoria sústavu SI jednotiek. Viac o nich si vieš prečítať na https://sk.wikipedia.org/wiki/SI

$$1\ \mathrm{a} = 100\ \mathrm{m}^2 = 100\frac{\mathrm{kg}^2}{\mathrm{Pa}^2\cdot\mathrm{s}^4}.$$

Teraz sa pokúsme zistiť, aký je vzťah medzi SI a našimi novozavedenými jednotkami. Inak povedané, potrebujeme si predošlé vzťahy vyjadriť tak, aby sme dostali niečo typu „1 kg = … Hrnčekov" (a podobne aj pre jednotky Detský stisk a Vajce namäkko).

$$240\ \mathrm{g} = 1\ \mathrm{H} \Rightarrow 1\ \mathrm{g} = \frac{1}{240}\ \mathrm{H} \Rightarrow 1\ \mathrm{kg} = 1000\ \mathrm{g} = 1000\cdot\frac{1}{240}\ \mathrm{H},$$

$$18\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{Ds} \Rightarrow 1\ \mathrm{Pa} = \frac{1}{18}\ \mathrm{Ds},$$

$$6\ \mathrm{min} = 1\ \mathrm{Vn} \Rightarrow 1\ \mathrm{min} = \frac{1}{6}\ \mathrm{Vn} \Rightarrow 1\ \mathrm{s} = \frac{1}{60}\ \mathrm{min} = \frac{1}{60}\cdot\frac{1}{6}\ \mathrm{Vn} = \frac{1}{360}\ \mathrm{Vn}.$$

Pomocou vyššie spomínaných vzťahov si teraz vieme nahradiť kg, s, Pa jednotkami H, Vn, Ds.

$$1\ \mathrm{a} = 100\cdot\frac{\left(\frac{1000}{240}\ \mathrm{H}\right)^2}{\left(\frac{1}{18}\ \mathrm{Ds}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{360}\ \mathrm{Vn}\right)^4}.$$

Upravíme :)

$$1\ \mathrm{a} = 100\cdot\frac{1000^2\cdot 18^2\cdot 360^4}{240^2}\frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{Vn}^4\cdot\mathrm{Ds}^2},$$

$$1\ \mathrm{a} = 9{,}447\,84\cdot 10^{15}\frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{Vn}^4\cdot\mathrm{Ds}^2}.$$

Juhú! Toto je presne to, čo sme chceli.

2.2 Vydutá priehrada

vzorák **Jumaj**, opravoval **Marek**

Normálny človek by asi postavil priehradu rovno skrz rieku. Prečo by to architekti robili inak? Od priehrady chceme veľa rôznych vecí, no tá najzákladnejšia je, aby sa pod tlakom vody neroztrhla.

Priehrady sa lámu, lebo nie sú dokonale pevné. Vedia sa deformovať, teda ich jednotlivé časti sa voči sebe vedia hýbať a preusporiadať. Pre každú deformovanú látku existuje istý najväčší tlak, ktorý je schopná vydržať. Tento limit sa nazýva *medza pevnosti*. Keď ju prekročíme a zatlačíme viac, jednotlivé časti telesa sa od seba oddelia.

Keď je voda alebo hociaká iná kvapalina v kontakte s nejakou prekážkou (či už stenou nádoby alebo potápačom hlboko v mori) tlačí na ňu vždy kolmo na jej povrch. To je prvý rozdiel, ktorý si môžeme všimnúť medzi rovnou a vypuklou priehradou: na rovnú bude voda tlačiť všade rovnakým smerom, na vypuklú všade iným.

Rovnú deformovateľnú priehradu si môžeme predstaviť ako veľmi tuhé lano upevnené na oboch koncoch. Keď by sme na lano tlačili všade rovnakou silou, zakrivilo by sa v smere sily. Keby sa ale takto zakrivila priehrada, zmenili by aj smery síl, ktoré by na ňu pôsobili. Tlačili by stále všade kolmo na ňu, teda by sa ju snažili rozťahovať.

Naproti tomu vypuklú priehradu bude tlak vody stláčať, jednotlivé konce bude tlačiť k sebe.

Plochú priehradu bude tlak vody rozťahovať, no vypuklú stláčať. Väčšina materiálov (všetky používané v stavebníctve), vydrží viac, keď ich stláčate – majú vyššiu medzu pevnosti pre stláčanie ako pre rozťahovanie. Vďaka tomu vypuklé priehrady znášajú tlak vody lepšie.

2.3 Kuchár fyzikom

vzorák **Marek Repka**, opravoval **Kubo H.**

Pri realizácií tejto úlohy je nutné si uvedomiť, aké prostriedky z domácich zdrojov efektívne použiť, aby mal experiment reálny zmysel. Ide hlavne o to, že musíme zabezpečiť priebeh experimentu v súlade s našim teoretickým modelom, to znamená aby v experimente nebol fundamentálny problém, pre ktorý meranie nebude mať reálny zmysel. Ďalej je potrebné minimalizovať všetky rušivé prvky z okolia, aby sme predišli pri meraní náhodným chybám. Pri meraní si musíme takisto uvedomiť, či sa meracie prístroje nesprávajú invazívne, t. j. či nezmenia situáciu a tak nespôsobia systematické chyby (konkrétne tepelná kapacita teplomera).

Konštrukcia experimentu

Predpokladáme, že v kalorimetri prebieha tepelná výmena medzi kvapalinou a výhrevnou špirálou. Výsledná tepelná kapacita sa rovná súčtu tepelnej kapacity kvapaliny a tepelnej kapacity špirály. Zmena vnútornej energie sústavy sa rovná práci, ktorú vykonala špirála. Túto prácu, resp. príkon zmeriame wattmetrom (alebo vieme nájsť na prístroji). Straty do okolia zanedbáme.

Vychádzame z kalorimetrickej rovnice

$$Pt = c_{kv} m_{kv}\, \Delta T + c_s m_s\, \Delta T\,,$$

kde P je príkon špirály, t je čas, c_{kv} je merná tepelná kapacita kvapaliny, m_{kv} je hmotnosť kvapaliny, c_s je merná tepelná kapacita špirály, m_s je hmotnosť špirály a ΔT je zmena teploty.

Úpravou tohto vzťahu vyjadríme mernú tepelnú kapacitu kvapaliny:

$$c_{kv} = \frac{Pt - c_s m_s\, \Delta T}{m_{kv}\, \Delta T}.$$

Ako prvú pomôcku budeme potrebovať kalorimeter. Ten môžeme zhotoviť z krabice od mlieka, molitanu (izolačného materiálu), vonkajšej krabice a veka (kúsok molitanu obalený alobalom). Ďalej potrebujeme výhrevnú špirálu s wattmetrom. Potom váhu, ktorou zmeriame hmotnosť kvapaliny (rýchlejšie a presnejšie ako cez objem). A nakoniec multimeter s funkciou merania teploty pomocou termo sondy (typ K). Ten môžeme nahradiť teplomerom.

Postup

1. Urobíme sériu 3 testov s vodou aby sme zistili, rozdiel relatívny rozdiel tepla, ktoré zostane počas experimentu v sústave k predpokladanému teplu podľa príkonu špirály.
2. Kalorimeter umiestníme na váhu a vynulujeme. Následne nalejeme adekvátne množstvo vody. Hmotnosť zapíšme.
3. Do kalorimetria vložíme špirálu (vopred známej hmotnosti a tepelnej kapacity) a termo sondu.
4. Kalorimeter zakryjeme vekom, a odčítame ustálenú teplotu sústavy t_1.
5. Pripojíme špirálu cez wattmeter do siete sledujeme rastúcu teplotu a stopujeme čas. Po vhodnom čase špirálu odpojíme. Počkáme kým sa výsledná teplota sústavy t_2 ustáli. Zapíšeme všetky hodnoty.
6. Postup opakujeme viackrát.
7. Zostavíme tabuľku hodnôt, zo zdrojových hodnôt vypočítame tepelnú kapacitu.
8. Z nameraných hodnôt vypočítame relatívne množstvo tepla, ktoré ostalo v sústave. Môžeme spraviť na základe tohto korekciu, aby sme získali presnejšie dáta. Pri výpočte použijeme hodnoty $c_{H_2O} = 4180\ \mathrm{J/(kg°C)}$ a $c_{\mathrm{Fe}} = 502{,}4\ \mathrm{J/(kg°C)}$. Hmotnosť špirály je $m_s = 0{,}075\ \mathrm{kg}$ a jej výkon je $P = 748\ \mathrm{W}$.

T_1 [°C]	T_2 [°C]	m_{H_2O} [kg]	Q [J]	t [s]	W [J]	c_{exp} [$Jkg^{-1}°C^{-1}$]	Q_{rel} [%]
18	38	0,5	42554	60	44880	4488	94,82
17	55	0,6	96736	150	112200	4921	86,21
52	68	0,6	40731	60	44880	4675	90,76
						priemer:	90,60

9. Postup opakujeme rovnako s inými kvapalinami (mlieko, ocot), pričom použijeme korekciu. Čas je v oboch prípadoch $t = 60$ s a teda celkové dodané teplo je $W = 44\,800$ J.

kvapalina	T_1 [°C]	T_2 [°C]	m_{kv} [kg]	c_{kv} [$Jkg^{-1}°C^{-1}$]	$c_{kv_{kor}}$ [$Jkg^{-1}°C^{-1}$]
ocot	24	59	0,3	4274	3872
mlieko	10	37	0,4	4156	3765

Poznámka

Pri experimentoch sa môžeme dopustiť rôznych chýb merania, ktoré sa snažíme minimalizovať. V tomto prípade sme najprv merali známu hodnotu tepelnej kapacity vody a zistili, ako veľmi nepresné výsledky dostaneme. Z toho sme urobili korektúru výsledkov tepelnej kapacity látok, ktoré sme chceli namerať. Iný spôsob, ako zmenšiť odchýlku merania, je opakovať experiment viackrát.

2.4 Most Atlas

vzorák **Marek**, opravoval **Marek**

Most na obrázku sa volá viadukt, a konkrétne je to Gouwe-aquaduct v Holandsku. Most má rozmery okolo 45 m na dĺžku, šírku okolo 45 m a výšku okolo 6 m. Podstatné je si uvedomiť, že hmotnosť vytlačenej vody je rovnaká ako hmotnosť lode, ktorá vytláča vodu. Toto tvrdenie si vieme overiť doma s poloplnou fľašou vody, a to tak, že fľašu ponoríme do vody. Hladina vo fľaši sa ustáli v okolí hladiny vonku a teda fľaša vytlačila objem vody rovný jej hmotnosti.

Keby bola loď v prieplavovej komore, hladina sa zvýši. No my máme prípad, keď voda ktorá by zvýšila hladinu, môže odtiecť napríklad do susedného kanála, jazera, mora. Takto sa objem vytlačenej vody rozleje na signifikantne väčšiu plochu a teda sa výška hladiny skoro nezmení. Hydrostatický tlak na dne mosta je teda $h\rho g$, kde h je výška vody, ρ je hustota vody a g je gravitačné zrýchlenie. Tento tlak sa prechodom lode ponad most nezmení: hustota a gravitácia zostanú rovnaké a o výške sme povedali, že jej zmena je zanedbateľná. Ba čo viac, tá zmena nastala už pri spustení lode na vodu, takže prechodom ponad most loď žiadnu ďalšiu vodu nevytlačí. Teda tlak na most sa nezmení. Z čoho vyplýva, že cez most môže prejsť hocijaká loď, ktorá sa naň zmestí.

Kedy sa to môže pokaziť? Napríklad ak je hmotnosť lode je dostatočná, aby mala hĺbku ponoru väčšiu, ako je hĺbka vody na moste. To je tých 6 m. Potom by váha loda mohla byť väčšia ako hmotnosť vytlačenej vody, pretože by sa opierala o dno. Tým by sa mohla presiahnuť nosnosť mosta a most by spadol.

2.5 Voda kvápe!

vzorák **Adam**, opravoval **Adam**

Na začiatok treba povedať, že táto úloha bola ozaj ťažká a jej úspešné vyriešenie vyžadovalo použitie znalostí určite nie samozrejmých očakávanému vzdelaniu riešiteľa, čo robí z vyriešenia čin obdivuhodný a z nevyriešenia čin nie zahanbujúci.

Ak chceme zistiť, do akej výšky dosiahne voda v sude, najprv musíme zistiť, aký objem vody sa bude v sude nachádzať. Zadanie nám dáva údaj o množstve zrážok v mm. To je jednotka trochu maskovaná, a jej forma, ktorá výstižnejšie hovorí o jej svetskej podstate, je „tisícina z metra kubického na meter štvorcový“.

Hľadaný objem teda získame tak, že obsah pôdorysu všetkého kde dopadne voda a stečie do nášho sudu vynásobíme 12 mm zo zadania. Do tejto kategórie patrí akurát tak strecha a diera na sude.

$$V = (5{,}7\ \mathrm{m} \cdot 6{,}4\ \mathrm{m} + 0{,}6\ \mathrm{m} \cdot 1{,}2\ \mathrm{m}) \cdot 12\ \mathrm{mm} = 0{,}4464\ \mathrm{m}^3 = 446{,}4\ \mathrm{l}.$$

Teraz nám ostáva nepomerne náročnejšia časť, a to zistiť, akej výške hladiny tento objem zodpovedá. Na to sa nám najprv oplatí vedieť, aký by bol objem celého, nezrezaného sudu (predsa len, mohlo by sa stať, že objem dažďovej vody je vačší než objem celéhu suda, čo by určite znamenalo že voda pretečie cez okraj).

$$V_{\mathrm{nezrezan\acute{y}sud}} = \pi \cdot (0{,}4\ \mathrm{m})^2 \cdot 1{,}2\ \mathrm{m} \doteq 0{,}6032\ \mathrm{m}^3 = 603{,}2\ \mathrm{l}.$$

Ako vidíme, naša nádej rýchleho riešenia rýchlo zmizla. Ale aspoň sme sa dozvedeli, že nezrezaný sud by bol naplnený nad polovicu, čo sa nám hodí v ďalšom výpočte. Ako by tých sklamaní nebolo málo, treba vyjaviť, že k peknému riešeniu na spôsob rovnice, ktorá by nám vypľula žiadané riešenie, ani neexistuje. Existujú ale vzorce, ktoré by nám umožnili z výšky hladiny dostať objem vody v sude, čo síce nie je to, čo chceme, ale mohli by sme úlohu vyriešiť tak, že si v nejakom programe necháme vykresliť graf (alebo vypísať tabuľku) závislosti objemu od výšky hladiny, a pozrieme sa, pri akej výške vychádza patričný objem.

Ak ale potrebné vzorce nepoznáme/nenašli sme/nechceme ich použiť, je aj iná cesta, síce o máličko nepresnejšia, ale to nevadí. V Exceli sa pokúsime vypočítať objem vody v sude v závislosti od výšky hladiny tak, že budeme skladať valec z nesmierne tenkých kvádrikov. Už vieme, že nezrezaný sud by bol zaplnený viac než do polovice, a tak sa zameriame, kvôli jednoduchosti, len na objem nad polovicou.

Z Pytagorovej vety vieme zistiť, že ak r je polomer sudu h je výška hladiny nad stredom suda (myslíme tým teraz nezrezaného brata nášho skutočného suda), šírka vodorovného prierezu je $x = 2\sqrt{r^2 - h^2}$. Potom x vynásobíme dĺžkou suda $l = 1{,}2$ m. Zvoľme si tenkosť plátkov, z ktorých budeme zliepať náš sud, ďalej označenú t. Keďže polomer je v desiatkach centimetrov, taký milimeter je priam až prehnane tenký plát, ale nič nám nebráni túto hrúbku použiť. Začnime teda skladať.

$$V_{\mathrm{nadpolovicou}}(h) = 2tl\sqrt{r^2 - (t)^2} + 2tl\sqrt{r^2 - (2t)^2} + 2tl\sqrt{r^2 - (3t)^2} + 2tl\sqrt{r^2 - (4t)^2} + \cdots + 2tl\sqrt{r^2 - h^2}.$$

Toto je už možné ľahko počítať v Exceli (alebo inom tabuľkovom kalkulátore). Vieme, že objem nad polovicou v našom sude bude $0{,}6032\ \mathrm{m}^3 - 0{,}4464\ \mathrm{m}^3 = 0{,}1568\ \mathrm{m}^3$. Po aplikovaní načrtnutého postupu som zistil, že náš objem zodpovedá výške nad polovicou suda $h = 16{,}8$ cm. Ešte nám treba overiť, či to nie je viac. než zrezanosť suda umožnuje, a teda či nám voda nepretečie. Jednoduchý výpočet cez Pytagorovu vetu nám ale prezradí, že celková výška nášho zrezaného valca je 66,46 cm, a teda naša dažďová voda si môže pokojne hovieť vo svojich 56,8 cm.