Riešenia 2. kola zimnej časti

2.1 Hriatô

vzorák **Bubu**, opravoval **Bubu**

Teória

Našou úlohou je porovnať rýchlosť odparovania vody v čiernej a bielej nádobe. Teda budeme merať objem vody v daných nádobách v priebehu času. Rýchlosť vyparovania závisí od dvoch vecí, ktoré by mohli ovplyvniť náš výsledok a od oboch priamo úmerne. Po prvé je to od odkrytej plochy, teda plochy, z ktorej sa voda vyparuje. Keďže tento vplyv nechceme merať, zoberieme si nádoby s rovnakou vyparovacou plochou. Po druhé je to od teploty vody, ktorú získava napríklad tým, že na ňu svieti Slnko, a teda asi bude závisieť od farby nádoby, otázne je len to, či bude mať merateľný vplyv.

Zamyslime sa najprv teda nad tým, ako vlastne tú rýchlosť vyparovania budeme merať. Keďže daná nádoba bude čierna, či biela, asi to nebude odmerný valec. My použijeme šálky, a tie nebývajú pravidelne tvarované. Preto merať objem vody V v nej priamo by bolo veľmi náročné. Prelievanie vody z nádoby do nejakého odmerného valca by bolo nepresné, keďže by nám v nádobe mohla pri pelievaní zostať nejaká voda.

Čo môžeme merať namiesto toho je váha nádoby s vodou m. Z hmotnosti nádoby bez vody m_0 potom vieme vypočítať hmotnosť vody m_v ako

$$m_v = m - m_0.$$

Pomocou hustoty vody ρ, ktorá je známa, už ľahko vyrátame objem vody v nádobe ako

$$V = \frac{m_v}{\rho}.$$

Ak by sme si chceli zrátať konkrétne hodnoty rýchlosti vyparovania, z objemov vody v priebehu času si už ľahko vyjadríme rýchlosť vyparovania

$$v = \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Teraz, keď už máme teóriu merania vypracovanú, prejdime k samotnému meraniu.

Meranie

Náš proces merania bude nasledovný: zoberieme si dve podobne veľké šálky, jednu čiernu, jednu bielu. Odvážime ich, naplníme obe rovnakým množstvom vody, položíme na Slnko, a potom budeme v pravidelných časových intervaloch obe šálky vážiť. Na váženie použijeme kuchynskú váhu, ktorá má najmenší dielik 10 g a teda vieme rozoznať hmotnosť šálky a vody s presnosťou 5 g.

Keďže vyparovanie vody je pomalý proces, ako časový interval váženia vody sme si zvolili 45 minút. Aby sme mohli spraviť čo najviac meraní, šálky sme naplnili čo najviac, ale tak, aby boli naplnené do časti, v ktorej majú nemennú šírku. Toľko k detailom merania.

Povedzme si ešte niečo o spracovaní nameraných údajov. Intenzita slnečného svetla sa v priebehu dňa mení a preto nemôžeme rátať priemer z nameraných rozdielov objemov vody. Našou úlohou je zistiť, v ktorej zo šálok sa voda vyparuje rýchlejšie. Preto budeme porovnávať rýchlosť vyparovania vody v jednotlivých šálkach v daných časových úsekoch. Na výpočet objemu vody sme použili hustotu vody $\rho = 1\ \mathrm{g/cm^3} = 1\ \mathrm{g/ml}$.

Namerané údaje:

Šálka	m_0 [g]	m_1 [g]	m_2 [g]	m_3 [g]	m_4 [g]
čierna	170	265	250	245	245
biela	95	190	180	175	170

Merania: *m_0 je hmotnosť samotnej šálky, m_1 hmotnosť šálky aj s vodou na začiatku. Zvyšné merania sú hmotnosti šálok s vodou, každá ďalšia odmeraná 45 minút po predchádzajúcej. Ako vidíme z tabuľky, po troch hodinách už svietilo Slnko tak slabo, že sa za 45 minút nevyparilo merateľné množstvo vody, preto sme meranie ukončili. Príslušné objemy vody sú v nasledujúcej tabuľke.*

Šálka	V_0 [ml]	V_1 [ml]	V_2 [ml]	V_3 [ml]	V_4 [ml]
čierna	0	95	85	80	80
biela	0	95	80	75	75

Objemy: *Jednotlivé objemy sú vyrátané objemy vody v šálkach, prislúchajú hmotnosti šálky s rovnakým indexom. Tak ako predtým, V_0 je vody v šálke bez vody, a zvyšné merania už z vodou. Rýchlosti vyparovania sú v nasledujúcej tabuľke.*

Analýza výsledkov a závery

Pozrime sa nakoniec na to, čo nám naše namerané údaje vlastne hovoria. Obe šálky sme na začiatku naplnili rovnakým objemom vody. Z meraní vidíme, že už po 45 minútach bol rozdiel v objemoch vody v šálkach merateľný, pričom viac vody bolo v bielej šálke. Náš dohad, že sa voda v čiernej šálke bude vyparovať rýchlejšie bol teda pravdivý. Rýchlosť vyparovania vody v nádobe postavenej na priamom slnku naozaj závisí od farby tejto nádoby.

2.2 Kvíčo Držgroš

vzorák **Marcel**, opravoval **Marcel**

V celom vzoráku budem počítať s tým, že plocha Mesiaca, na ktorú sa pozeráme, je kruh, a nie polguľa, lebo je oveľa jednoduchšie počítať s kruhom ako s polguľou. Môžem to robiť preto, lebo povrch kruhu je

$$S_k = \pi r^2$$

a povrch gule je

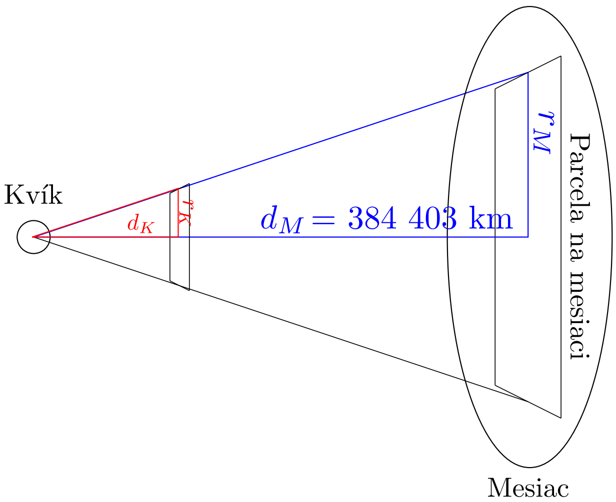
$$S_g = 4\pi r^2.$$

Mesiac vidíme iba z jednej strany, a preto maximálny pozemok, ktorý môžeme vidieť, je polovica povrchu mesiaca, teda polguľa. Povrch polgule je

$$\frac{S_g}{2} = \frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi r^2.$$

Vidíme teda, že skutočný povrch polgule je dvakrát taký veľký, ako povrch kruhu s rovnakým polomerom. Čím menšiu plochu vezmeme z povrchu gule, tým menej sa nám na nej prejaví zakrivenie. Podobne, ako môžeme mať pocit, že Zem je plochá, lebo z nej vidíme iba príliš malý výsek. Maximálny možný rozdiel medzi povrchom kruhu a povrchom časti gule (medzi tým, keď rátame so zakrivením a keď nie) teda je, že pozemok na guli môže byť dvakrát taký veľký ako na rovine, a teda to môžeme zanedbať.

Nakreslime si teda obrázok, ako to približne vyzerá:



Obrázok 1: *Nákres Kvíka, pravítka a Mesiaca*

Z obrázka vidíme, že trojuholník, ktorý má strany r_K a d_K (ten menší, červený) je podobný s trojuholníkom so strany r_M a d_M (ten väčší, modrý). Vieme, že podobné trojuholníky majú strany v rovnakom pomere. Teda vieme, že

$$\frac{d_K}{d_M} = \frac{r_K}{r_M}.$$

Z tejto rovnice si vyjadríme dĺžku parcely na povrchu Mesiaca

$$r_M = \frac{d_M r_K}{d_K}.$$

Keďže parcely bývajú väčšinou štvorcové, alebo obdĺžnikové, povrch štvorcovej parcely, ktorý vidí Kvík, je

$$S_K = (2r_K)^2$$

a povrch „reálnej“ parcely na Mesiaci je

$$S_M = (2r_M)^2 .$$

Predtým sme si už polovicu dĺžky parcely r_M vyjadrili, a teda ho môžeme dosadiť do tejto rovnice, čím dostaneme

$$S_M = \left(2\frac{d_M r_K}{d_K}\right)^2 .$$

Pomer týchto dvoch plôch si teda vieme vypočítať ako

$$k = \frac{S_M}{S_K} = \frac{(2\frac{d_M r_K}{d_K})^2}{(2r_K)^2} = \frac{2^2\frac{d_M^2 r_K^2}{d_K^2}}{\frac{2^2 r_K^2}{1}} = \frac{2^2 r_K^2 d_M^2}{2^2 r_K^2 d_K^2} = \frac{d_M^2}{d_K^2}.$$

Z tohto nám teda vyplýva, že pomer plôch je rovnaký ako pomer druhých mocnín týchto dvoch vzdialeností.

Priemerná vzdialenosť Mesiaca od Zeme je 384 403 km = 384 403 000 m. Po dosadení hodnôt teda máme:

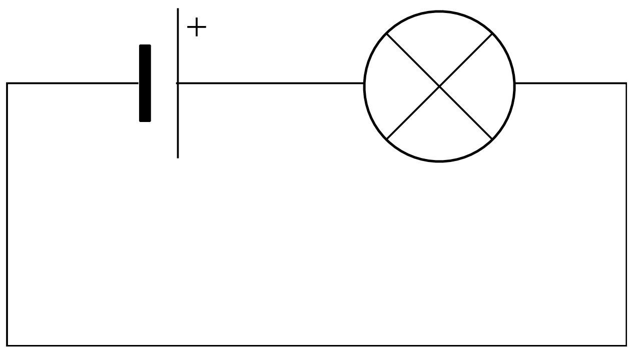
$$k = \frac{(384\,403\,000\ \mathrm{m})^2}{(0{,}8\ \mathrm{m})^2} = \frac{147\,765\,666\,409\,000\,000}{0{,}64} = 230\,883\,853\,764\,062\,500.$$

Teda vidíme, že parcela na Mesiaci je 230 000 000 000 000 000-krát väčšia ako parcela, ktorú vidí Kvík.

2.3 Schodišťák

vzorák **Krtko**, opravoval **Krtko**

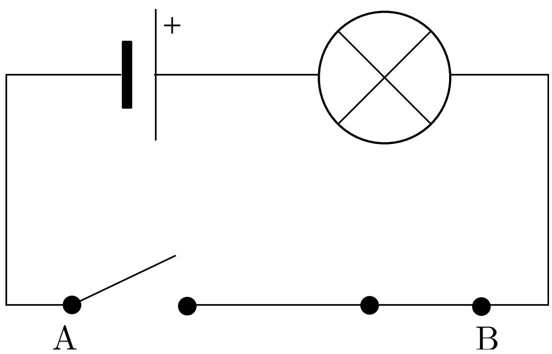
Začnime otázkou. Kedy svieti žiarovka? No, keď cez ňu tečie prúd. Na to je však nutné, aby bol obvod uzavrený. Teda musí existovať obojstranné spojenie medzi zdrojom a žiarovkou.



Obrázok 2: *Základné zapojenie, tak, aby žiarovka svietila*

Pridaním prepínača do obvodu získame možnosť tento obvod spájať a rozpájať. Ale pre naše účely nestačí iba tak pridať prepínač. My totiž potrebujeme pridať dva, ktoré musia byť zapojené rovnocenne. Žiaden nemôže byť nadradený, vždy môžu iba zmeniť možnosť: zo spojeného obvodu na rozpojený a naopak.

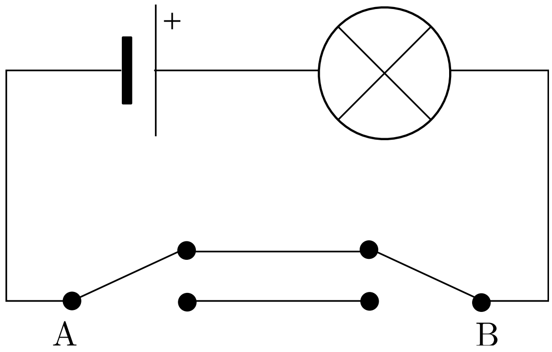
Predstavme si, že oba prepínače sú zapojené, tak aby bol obvod spojený. Nazvime si ich `A` a `B`. Teraz jeden prepínač obvod rozpojí, napríklad prepínač `A`. Takže prepínač `B` musí byť zapojený sériovo k prepínaču `A`, lebo ak by bol paralelne, obvod by sa neprerušil.



Obrázok 3: *Pridáme prepínače*

Ak chceme znova zasvietiť[1], prepínač B musí situáciu zachrániť a obvod znova spojiť. Teda musí byť napojený na druhý vývod z prepínača `A`.

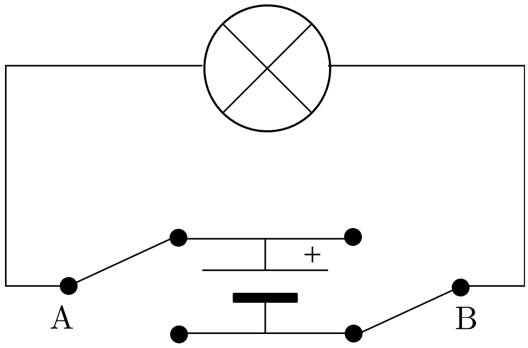
[1] pomocou prepínača `B`



Obrázok 4: *Prepínač B zasahuje*

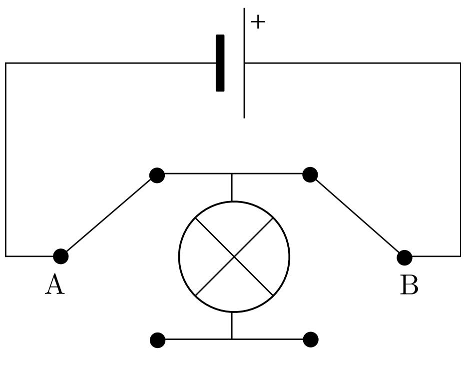
Iná úvaha

Položme si znova otázku. Kedy svieti žiarovka? Keď má na jednej strane kladný pól a na druhej záporný[2]. S takouto úvahou by sme mohli napojiť jeden prepínač na každú stranu žiarovky. A tento prepínač by jednoducho vyberal medzi kladným a záporným pólom na zdroji.



Obrázok 5: *Aj takto to ide*

Ešte pozor na skratovanie zdroja



Obrázok 6: *Takto nie!*

Napríklad pri tomto zapojení buď svieti žiarovka, alebo sa skratuje zdroj. Toto zapojenie z hľadiska žiarovky síce funguje, ale z hľadiska bezpečnosti nevyhovuje a prakticky by proste nemohlo fungovať. V najlepšom prípade by iba vyhodilo poistky.

[2] alebo opačne, pre žiarovku je jedno, na ktorej strane má kladný a na ktorej záporný pól

2.4 Napoleon EnPlusPrvý

vzorák **Nina**, opravovala **Nina**

Aby sme spočítali dráhu lúča, musíme ju najskôr nájsť. Lúč na začiatku vojde do škatule presne v jej rohu a odrazí sa od náprotivnej steny vo vzdialenosti 25 cm, čiže na začiatku zviera s ľavou stenou škatule uhol $\varphi = \arctan \frac{25}{100}$. Tu si môžeme všimnúť, že normála steny škatule v bode, kde lúč dopadol je rovnobežná s ľavou stenou škatule a teda lúč zviera s normálou tiež uhol φ – uhol dopadu.

Zákon odrazu nám hovorí, že uhol dopadu lúča φ sa bude rovnať uhlu odrazu (tieto uhly meriame od normály v bode dopadu lúča). Vďaka tomu bude odrazený lúč symetrický podľa normály s odrážajúcim sa lúčom. Keďže škatula je štvorec, protilahlé steny škatule sú rovnobežné a teda lúč dopadne na protiľahlú stenu 25 cm doprava od posledného odrazu, čiže do jej stredu, znovu s uhlom φ a s ním sa aj odrazí. Takto sa lúč odtazí ešte raz na hornej stene a dopadne na zrkadielko v pravom dolnom rohu.

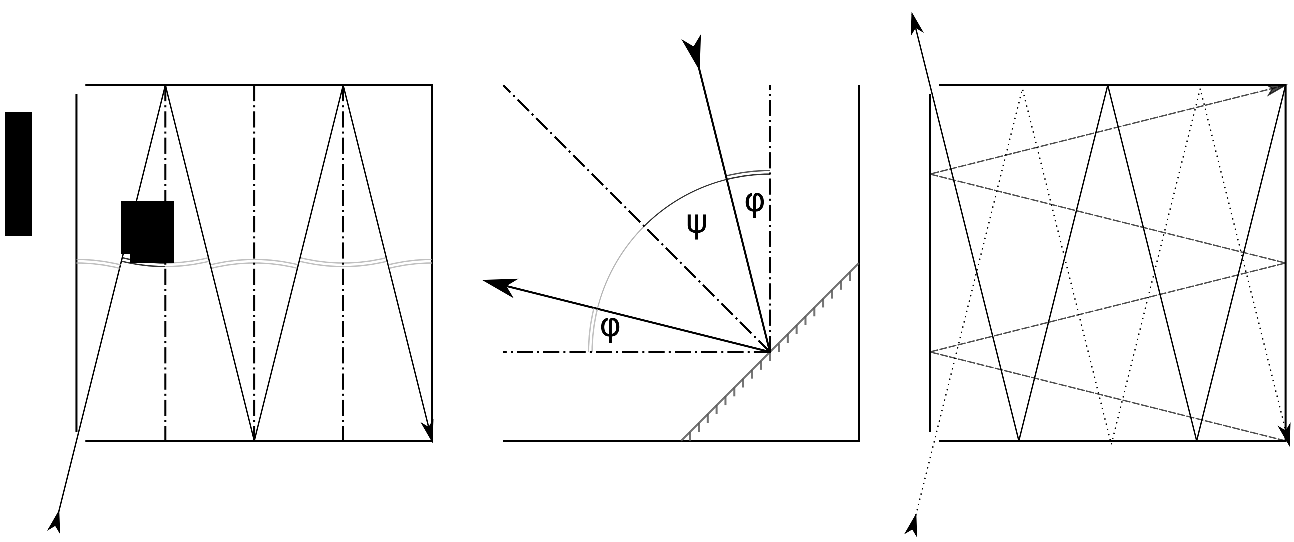
Zrkadielko je oproti stene pootočené o 45° a lúč teda na neho dopadá aj sa odráža v uhle $\psi = 45° - \varphi$. Tu si všimnime, že odrazený lúč zviera so spodnou stenou škatule opäť uhol φ, rovnako ako pri vstupe do škatule s jej ľavou stenou. Z toho môžeme usúdiť, že pohyb lúča počas nasledujúcich štyroch odrazov bude rovnaký ako pohyb počas prvých štyroch odrazov, len otočený okolo stredu škatule o 90° proti smeru hodinových ručičiek.

Takto sa dostaneme k hornému zrkadielku, od ktorého sa lúč odráža pod uhlom ψ, čiže zviera s ľavou stenou škatule opäť uhol φ, z čoho vieme odhadnúť, že lúč opäť vykoná podobnú sériu štyroch odrazov, tentokrát pootočených okolo stredu o ďalších 90°, čiže 180° oproti prvej sade. S tým rozdielom, že posledný odraz sa nevykoná (nie je o čo, v tomto rohu škatule je diera), ale lúč vyletí z škatule v ľavom hornom rohu.

Teraz už poznáme dráhu lúča a je ľahko vidno, že sa skladá z 12 rovnako dlhých trajektórií, rozdelených 11 odrazmi. Spočítajme si teda ešte dĺžku jednej z nich, napríklad prvej. Tá spolu s ľavou stenou škatule a prvými 25 cm hornej steny tvorí pravouhlý trojuholík, takže ju vieme spočítať pomocou Pytagorovej vety:

$$\sqrt{(100\ \mathrm{cm})^2 + (25\ \mathrm{cm})^2} = 25\sqrt{17}\ \mathrm{cm}.$$

To znamená, že celá dráha mala dĺžku $12 \cdot 25\sqrt{17}\ \mathrm{cm} = 300\sqrt{17}\ \mathrm{cm}$.



Obrázok 7: *Odrazy v škatuli, odraz od zrkadielka a celá dráha lúča*

2.5 Pratajúce sa závažia

vzorák **Tomáš**, opravoval **Tomáš**

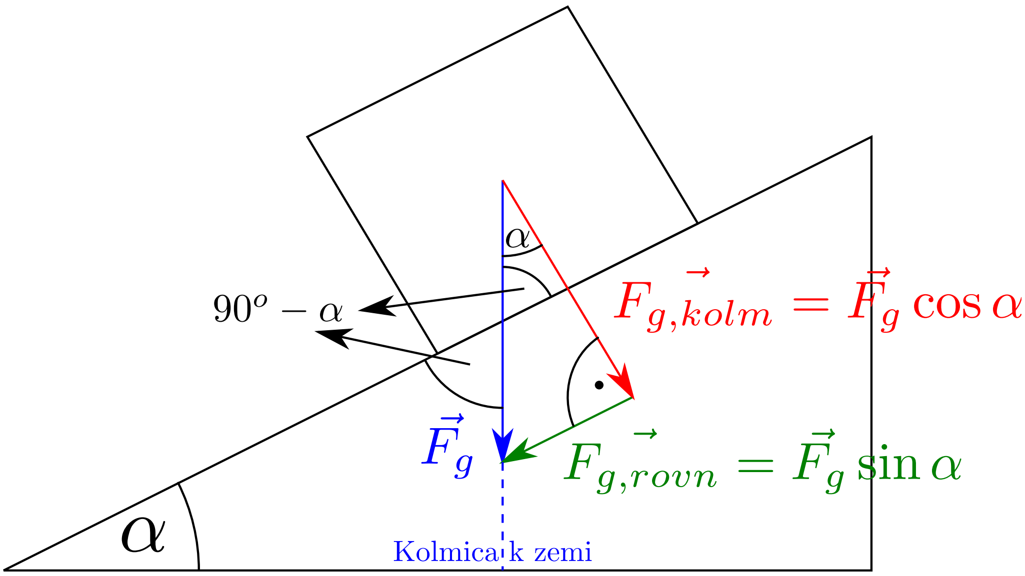
Aj vám vŕta v hlave, prečo je v zadaní spomínaná kladka, cez ktorú je prehodené lano? Na čo slúži? Táto kladka je len jednoduchá kladka, ktorá mení tvar lana, ale inak nijako neovplyvňuje veľkosť síl, ktorými závažia na seba navzájom pôsobia.

V ďalšom kroku si rozoberme sily pôsobiace na prvé závažie, t. j. závažie na naklonenej rovine. Ako pravdepodobne tušíte, sila, ktorou toto závažie je ťahané dole kopcom, je menšia ako veľkosť gravitačnej sily naň pôsobiacej. Prvé závažie je, samozrejme, zospodu podopreté naklonenou rovinou. Naklonená rovina teda bude pôsobiť proti časti gravitačnej sily.

V tomto bode odporúčam tým, čo si s touto témou ešte dobre nerozumejú, a ešte tak nespravili, aby nazreli do študijných materiálov na stránke `https://ufo.fks.sk/studijne_materialy/`, konkrétne do časti „rozkladanie síl a trigonometria". Ideme rozkladať sily, teda v ďalšej časti vzoráku bude potrebné, aby ste mali o téme nejakú predstavu.

Gravitačnú silu pôsobiacu na prvé závažie si rozložíme na dve časti: časť pôsobiacu kolmo na naklonenú rovinu a časť pôsobiacu rovnobežne s povrchom naklonenej roviny. Časť pôsobiaca kolmo na naklonenú rovinu nás nezaujíma, pretože je vykompenzovaná normálovou silou roviny (to je tá, ktorá spôsobuje, že „závažie nepadá dovnútra kopca"). Časť pôsobiaca rovnobežne s povrchom naklonenej roviny je tá, ktorá aj ťahá za lano.

Jej veľkosť si vyjadríme geometricky. Ak predĺžime vektor gravitačnej sily, vytvoríme kolmicu k zemi a vznikne nám pravouhlý trojuholník tvorený predĺženým vektorom sily, zemou a naklonenou rovinou pod uhlom α. Tu bude mať tretí uhol v trojuholníku veľkosť $90° - \alpha$. K tomuto uhlu existuje vrcholový uhol vnútri trojuholníka tvoreného silami, a vďaka tomu vieme nájsť aj tu uhol α medzi gravitačnou silou a jej zložkou kolmou na kopec.



Obrázok 8: *Rozklad síl*

Pomocou definície sínusu uhla v pravouhlom trojuholníku zistíme, že sila, ktorá ťahá prvé závažie za lano, bude veľká $m_1 g \sin\alpha$, kde m_1 je hmotnosť prvého závažia a α je uhol sklonu roviny. Druhé závažie voľne visí, teda gravitačná sila pôsobiaca naň, ktorou bude závažie aj ťahať za lano, je xg. Tým, že je lano z oboch strán ťahané závažiami, vzniká v ňom pnutie, ktoré je vo všetkých miestach lana rovnaké. Preto lano drží prvé a aj druhé závažie rovnako veľkými silami[3]. Na to, aby sa sa sústava nepohybovala, obe sily, ktorými závažia napínajú

[3] Ťažšia otázka na zamyslenie: Boli by tieto sily rovnako veľké, aj keby sa sústava závaží a lana pohybovala?

lano, sa musia rovnať:

$$m_1 g \sin\alpha = xg.$$

Vydelením oboch strán rovnice gravitačným zrýchlením g vyjadríme potrebnú hmotnosť druhého závažia,

$$x = m_1 \sin\alpha.$$

Zistili sme, aká bude potrebná hmotnosť druhého závažia x v závislosti od sklonu kopca a hmotnosti prvého závažia. Na záver dosadíme do odvodeného vzťahu konkrétne hodnoty zo zadania, kde $m_1 = 6$ kg a $\alpha = 45°$. Dostaneme tak výsledok, že hmotnosť visiaceho závažia je $x \doteq 4{,}24$ kg.