Trojsten

Korešpondenčný seminár UFO
XI. ročník, 2017/2018

UFO, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Riešenia 1. kola letnej časti

1.1 Kúpeľ nápadov

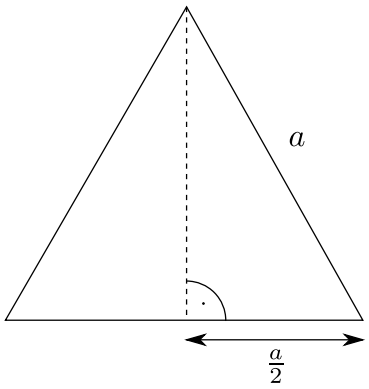
vzorák **Terka**, opravovala **Terka**

Predstavme si najprv, čo sa bude s vodou v nádobe diať. Vieme, že keď teleso ponoríme do vody, jeho ponorená časť vytlačí vodu z nejakej oblasti. Táto voda nemôže zmiznúť, a teda sa zvýši hladina vody. Je teda fajn zistiť si, aká časť hranola bude pod vodou. Z Archimedovho zákona vieme, že tiaž hranola sa musí rovnať tiaži vytlačenej kvapaliny, pričom hmotnosť hranola vieme vypočítať z jeho objemu a hustoty. Objem ponorenej časti si označíme V_{pod}.

$$m_{\text{hranol}} \cdot g = V_{\text{pod}} \cdot \rho_v \cdot g,$$

$$V_{\text{hranol}} \cdot \rho = V_{\text{pod}} \cdot \rho_v.$$

Keďže si objem ponorenej časti vieme napísať ako súčin obsahu podstavy a výšky ponorenej časti, potrebujeme zistiť obsah podstavy. Tá vyzerá ako rovnostranný trojuholník. Obsah trojuholníka S_{hranol} je $\frac{a \cdot v_a}{2}$, kde si výšku v_a na stranu a vypočítame z Pytagorovej vety.



Obrázok 1: *Podstava ihlana*

$$v_a = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2},$$

$$v_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a,$$

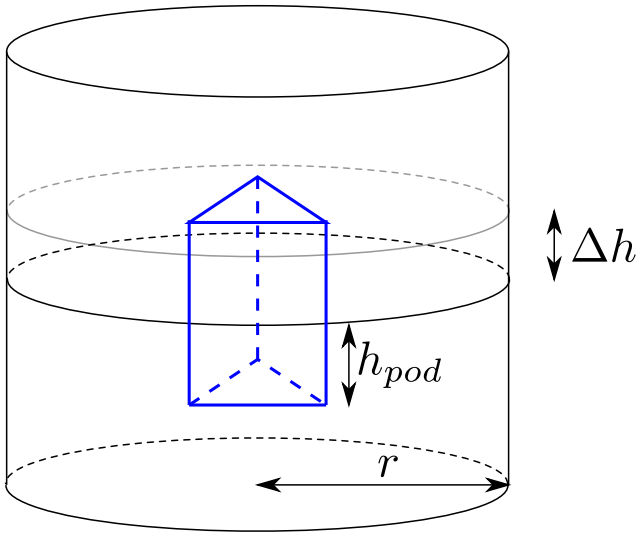
$$S_{\text{hranol}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a^2}{2}.$$

Teraz si môžeme rozpísať objem hranola cez obsah podstavy a výšku a oslobodiť z rovnice objem ponorenej časti.

$$h \cdot S_{\text{hranol}} \cdot \rho = V_{pod} \cdot \rho_v,$$

$$V_{pod} = \frac{h \cdot S_{\text{hranol}} \cdot \rho}{\rho_v}.$$

Získali sme objem hranola, ktorý bude ponorený pod vodou. Ako sme na začiatku povedali, rovnaký objem vody bol vytlačený, takže aby sme zistili výšku, o ktorú stúpla hladina, potrebujeme tento objem predeliť obsahom, na ktorom stúpla. Pozrime sa na obrázok. Keď stúpne voda v nádobe, znamená to, že hladina okolo hranola sa zvýši. To znamená, že plocha, ktorou budeme deliť je $S = S_{\text{nádoba}} - S_{\text{hranol}}$, kde $S_{\text{nádoba}} = \pi r^2$.



Obrázok 2: *Hranol v nádobe*

$$\Delta h = \frac{V_{\text{pod}}}{S} = \frac{\frac{h \cdot S_{\text{hranol}} \cdot \rho}{\rho_v}}{S_{\text{nádoba}} - S_{\text{hranol}}}$$

$$\Delta h = \frac{h \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \cdot \rho}{\left(\pi r^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2\right)\right) \cdot \rho_v}$$

Teraz stačí už len dosadiť zadané hodnoty v základných SI jednotkách a môžeme sa radovať z výsledku.

$$\Delta h = \frac{0{,}14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 0{,}012^2 \cdot 813}{\left(\pi \cdot 0{,}082^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot 0{,}012^2\right) \cdot 998}$$

$$\Delta h \doteq 0{,}338 \text{ mm}$$

Zistili sme, že hladina stúpla o približne **0,34 mm**, takže Terka si spokojne môže dať do kúpeľa naozaj veľa kačičiek.

1.2 Nohy života

vzorák **Marianka**, opravovala **Marianka**

Keď sa pozrieme na ľudské kráčanie ako také, vieme si všimnúť, že naše nohy sa pohybujú kmitavým pohybom dopredu. Zdvihneme jednu nohu, potom ju položíme a vzápätí zdvihneme druhú, ktorá sa z momentu pokoja prehupne ďalej a predbehne prvú nohu. Takýto pohyb pripomína inverzné kyvadlo.

Zamyslime sa nad tým, aké sily ovplyvňujú chôdzu. Gravitačná sila nás drží neustále na zemi. Čo ukazuje to, že vďaka gravitácii sa dotýkame zeme, čiže vďaka nej kráčame. Avšak, toto nie je sila, ktorá nás posúva pri chôdzi dopredu. Je to len sila, ktorá drží naše chodidlá na zemi. Gravitácia taktiež spôsobuje to, že keď zdvíhame nohu, potrebuje vykonať nejakú prácu na to, aby sa odlepila od zeme. To ukazuje to, že naše nohy pri každom kroku vykonávajú prácu, aby odlepili naše telo od zeme a posunuli nás ďalej.

Ďalší ovplyvňujúci faktor našej chôdze je trenie medzi nohami a zemou. Keď kráčame, trecia sila pôsobí v rovnakom smere, ako je smer chôdze. Mohli by sme teda povedať, že sila, ktorá nás posúva dopredu je trecia. Lenže to nie je pravda, keďže jediné, čo trecia sila robí je, že naše chodidlo zastaví, aby sa nešmýkalo ďalej po zemi.

Poďme sa nakoniec pozrieť na moment, keď sa jedna z nôh odlepí od zeme a druhá nesie váhu celého človeka. Newtonov tretí zákon hovorí, že každá akcia má svoju reakciu. Naša noha, ktorá stojí na zemi, tlačením na podložku vyvolá silu, ktorá pôsobí dozadu. Reakciou je sila, ktorá pôsobí dopredu a pomôže druhej nohe, ktorá sa v tom momente prehupuje dopredu, aby spoločne preniesli telo ďalej. Ako vidíme, nohy naozaj pri chôdzi vykonávajú prácu, aby nás posúvali ďalej. To, čo presne vykonáva prácu, sú svaly v našich nohách. Spaľujú energiu, aby mohli vykonávať prácu, čím vytvárajú silu, ktorá nás ženie dopredu. Preto, keď kráčame dlhšiu dobu, nás začnú bolieť nohy a sme unavení.

1.3 Vysávač

vzorák **Marcel**, opravoval **Marcel**

Ako zmerať podtlak? Spôsobov je určite veľa, ale čo človeku asi prvé napadne, je použiť vzorec na výpočet tlaku, teda že:

$$P = \frac{F}{S}.$$

Plochu vieme odmerať úplne jednoducho. Zmeriame plochu prierezu hadice na vysávanie. A čo so silou? Vieme napríklad urobiť to, že si položíme nejaký predmet na váhu, a zistíme, akú časť tiažovej sily ten vysávač nadľahčí. Silu dostaneme prenásobením hmotnosti tiažovým zrýchlením. Postup, ako sme merali podtlak, bol teda takýto: dali sme na digitálnu váhu závažie (v našom prípade tri litrové fľaše, ktoré boli spolu zviazané) a zapchali sme hadicu vysávača zátkou (my sme ju zapchali malým valčekom na maľovanie, ktorý mal takmer rovnaký priemer ako hadica, a keďže bol po krajoch chlpatý, dobre tesnil), zapli sme vysávač a zistili, o koľko vysávač nadľahčil tieto fľašky. Potom sme to predelili plochou hadice, a máme podtlak.

Meranie sme niekoľko krát zopakovali a hodnoty, ktoré nám vyšli, sme spriemerovali. Tu sú jednotlivé merania:

Číslo merania	1	2	3	4	5	Priemer
Nadľahčená hmotnosť závažia [kg]	1,42	1,46	1,42	1,4	1,43	1,426

Túto hmotnosť si prenásobíme tiažovým zrýchlením a dostaneme, že náš vysávač „ťahá“ silou 14 N. Po predelení plochou hadice (6,15 cm^2) dostaneme podtlak a ten je približne 22 kPa. Presnosť tohto merania je, samozrejme, obmedzená, lebo tlak sa vyrovnáva cez nedokonale tesniacu zátku hadice. Najlepšie by sa to dalo merať nejakým manometrom, ten sme ale bohužiaľ k dispozícii nemali.

1.4 Strom

vzorák **Marianka** a **Santa**, opravovali **Marianka** a **Santa**

Vyberme si vonku čo najsympatickejší strom a zamyslime sa, ako by sme si mohli úlohu zjednodušiť. Iste, ak by sme strom považovali za valec bolo by to jednoduché. Lenže náš strom má aj konáre a vetvičky, na ktoré len tak nemôžeme zabudnúť. Preto sa zamyslíme, ako zjednodušiť strom tak, aby sme to vedeli spočítať. Najprirodzenejšie zjednodušenie je odhadnúť hmotnosť kmeňa a hmotnosť vetvičiek a tie sčítať. Začneme napríklad tým, že vypočítame hmotnosť kmeňa – keď budeme poznať jeho objem a zistíme aj hustotu dreva, z ktorého náš strom pozostáva, nebude problém vypočítať jeho hmotnosť.

V prvom rade budeme potrebovať výšku nášho stromu. Veľmi jednoduchým príkladom, ako sa dá zistiť výška kmeňa stromu, je pomocou fotoaparátu. Stačí zobrať nejakú tyč známej dĺžky (napr. 1 meter) a priložiť ju ku stromu. Strom odfotíme z dostatočnej diaľky tak, aby ho bolo vidno až po vrch. Pomer dĺžok tyče a stromu na fotke sa musí rovnať aj ich pomeru dĺžok v realite.



Obrázok 3: *Náš strom*

$$\frac{h_{tf}}{h_{sf}} = \frac{h_t}{h_s},$$

$$\frac{0{,}011\ \text{m}}{0{,}105\ \text{m}} = \frac{0{,}615\ \text{m}}{h_s},$$

$$h_s = 5{,}87\ \text{m}.$$

Ďalej si odmeriame obvod kmeňa nášho stromu. Náš strom má obvod kmeňa 2,15 m. Z obvodu potrebujeme získať polomer a z polomeru zase obsah prierezu kmeňa. Z obvodu vieme získať polomer tak, že ho vydelíme 2π keďže platí: $\frac{2\pi r}{2\pi} = r$. Z toho si ľahko vypočítame obsah, čo je πr^2.

Poďme si do toho dosadiť náš obvod kmeňa:

$$r = \frac{2,15}{2\pi} \approx 0{,}342 \text{ m},$$

$$S = 0,342^2\pi \approx 0{,}367 \text{ m}^2.$$

Keď už máme obsah kruhovej „podstavy“ kmeňa, stačí dosadiť odhadnutú výšku stromu, vynásobiť tieto dva údaje a máme objem. My sme si odhadli, že náš strom má $h_s = 5{,}87$ m. Po vynásobení nám výšlo, že $V_{\text{kmeň}} = \pi r^2 h_{\text{strom}} = 0{,}367 \text{ m}^2 \cdot 5{,}87 \text{ m} = 2{,}15 \text{ m}^3$.

Vieme, že hmotnosť vypočítame vynásobením objemu a hustoty. Takže už nám stačí iba zistiť hustotu stromu. Tú vieme zistiť napríklad tak, že si nájdeme v tabuľkách hodnotu hustoty dreva alebo ju zmeriame experimentálne. Vezmeme nejakú vetvičku z nášho stromu, zmeriame jej obvod, z neho vyrátame obsah, vynásobíme ho zmeranou dĺžkou vetvičky, aby sme dostali objem, a odvážime vetvičku na Krtkovej digitálnej váhe (vetvičku sme rozlámali a tak sme ju dali na váhu).

$$o_{\text{vetvička}} = 0{,}2 \text{ m},$$

$$r_{\text{vetvička}} = \frac{0.2}{2\pi} \approx 0{,}032 \text{ m}.$$

Potom

$$S_{\text{vetvička}} = \pi 0{,}032 \text{ m}^2 \approx 0{,}003\,22 \text{ m}^2,$$

$$l_{\text{vetvička}} = 1{,}5 \text{ m},$$

$$V_{\text{vetvička}} = 1{,}5 \text{ m} \cdot 0{,}003\,22 \text{ m}^2 = 0{,}004\,83 \text{ m}^3,$$

$$m_{\text{vetvička}} = 0{,}8 \text{ kg},$$

a teda

$$\rho_{\text{vetvička}} = \rho_{\text{strom}} = \frac{0{,}8 \text{ kg}}{0{,}004\,83 \text{ m}^3} \approx 165{,}63 \text{ kg/m}^3.$$

Takže hustota nášho kmeňa je 165,63 kg/m^3.

Z tohoto si vyrátame hmotnosť kmeňa:

$$m_{\text{kmeň}} = V_{\text{kmeň}}\rho_{\text{strom}} = 2{,}15 \text{ m}^3 \cdot 165{,}63 \text{ kg/m}^3 = 356{,}82 \text{ kg}.$$

Teraz sa zameriame na druhú časť a tou je rozbor našich vetvičiek. Vetvy majú síce rôznu dĺžku, no dá sa povedať, že ich dĺžka rovnomerne klesá smerom nahor po strome.

Jednu zo spodnejších haluzí odsekneme / ulomíme a odvážime. Má dĺžku približne $l_{\text{haluz}} \approx 1{,}2$ m a hmotnosť približne $m_{\text{haluz}} \approx 2{,}3$ kg. Pretože je z tých spodnejších, predpokladáme, že je jednou z najdlhších.

Všimnime si, že čím vyššie na strom sa pozrieme, tým kratšie haluze sa na ňom nachádzajú. Budeme teda predpokladať, že sa skracujú rovnomerne s vzrastajúcou výškou stromu, až na vrchu máme haluze s nulovou dĺžkou. Z toho vyplýva, že môžeme počítať s tým, že všetky haluze majú polovičnú dĺžku oproti najdlhšej, najnižšie položenej.

Pre zovšeobecnenie problému budeme uvažovať s tým, že hmotnosť listov a drobnejších konárov je rovnomerne rozložená po celej haluzi. Ak teda najdlhžia z nich vážila približne $m_{h0} \approx 2{,}3$ kg, priemerná haluz bude vážiť $m_h \approx 1{,}15$ kg.

Pri pohľade na náš strom usudzujeme, že približne každých 0,3 m vychádzajú zo stromu zhruba 4 haluze, v našom prípade s ihličím. Prvá haluz zo stromu vychádza približne vo výške 1,2 m. Na strome je teda približne $4\frac{h_s - 1{,}2\text{ m}}{0{,}3\text{ m}} \approx 62$ haluzí. Ak priemerná haluz s menšími konárikmi a ihličím váži 1,15 kg, celková hmotnosť haluzí na strome bude približne $62 \cdot 1{,}15\text{ kg} \approx 71{,}6$ kg.

Súčtom hmotnosti haluzí a kmeňa získame celkovú hmotnosť nášho stromu, čo činí približne

$$71{,}6\text{ kg} + 356{,}82\text{ kg} = 428{,}43\text{ kg}.$$

1.5 Elektrovláčik

vzorák **Kubo**, opravoval **Kubo**

Na úvod si povedzme, že všetky štyri trakčné motory majú rovnaký odpor R_m. Na celé zapojenie privedieme zo zdroja rovnaké napätie U_z[1]. V celých úvahách a výpočtoch si motorčeky vieme nahradiť rezistormi. Rezistor prijímanú elektrickú energiu premieňa na teplo, motorček na otáčavý pohyb[2]. Oba majú pre prachádzajúci prúd tú vlastnosť, že majú nejakú elektrický odpor. Inak je jedno, či je tam zapojený rezistor, žiarovka, alebo chladnička.

Sériové zapojenie

Pri sériovom zapojení rezistorov (za sebou) platí $R_c = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$, teda 4 rovnaké rezistory s odporom R_m v sérii budú mať odpor $4R_m$. Potečie nimi teda prúd $I_1 = \frac{U_z}{4R_m}$. Každý motorček sa teda bude točiť s výkonom $P_1 = UI_1$.

Napätie na každom z týchto rezistorov **nie je** U_z, pretože platí $U = RI$, kde keď $R = R_m$ a $I = \frac{U_z}{4R_m}$, tak $U_1 = \frac{U_z}{4}$.[3] Výkon motorčeka teda bude

$$P_1 = U_1 I_1 = \frac{U_z}{4} \cdot \frac{U_z}{4R_m} = \frac{U_z^2}{16R_m}.$$

Štyri motorčeky budú mať spolu výkon štvornásobný a teda

$$P_{1c} = 4 \cdot \frac{U_z^2}{16R_m} = \frac{1}{4} \cdot \frac{U_z^2}{R_m}.$$

[1] Teda predpokladajme, že máme ideálny napäťový zdroj. Existujú i prúdové zdroje, ale keby sme to pripájali na taký, vyšlo by to rovnako

[2] v horšom prípade na dym

[3] Tak, ako sa pri paralelnom zapojení delí prúd, tak sa pri sériovom delí napätie. Keď si nie ste istí, môžete do známeho vzťahu $P = UI$ za U dosadiť $U = RI$ a dostanete $P = I^2R$. Je to spôsobené tým, že ako U nesmieme brať napätie v sieti, ale napätie na danom mieste. Pri takýchto výpočtoch býva fajn si povedať, **kde** to počítate.

Sérioparalelné zapojenie

Pri druhom zapojení musíme uvažovať, čo sa deje pri paralelnom zapojení rezistorov. Platí známy vzťah[4]

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}.$$

Tu máme paralelne dvojicu rezistorov, každú s odporom $2R_m$. Celkový odpor zapojenia teda bude R_m. Zapojením bude teda spolu pretekať prúd $\frac{U_z}{R_m}$. Toto však nie je prúd pretekajúci ktorýmkoľvek z motorčekov. Tento by sme namerali ampérmetrom úplne pred motorčekmi. Tento prúd sa ešte rozdelí do hornej a spodnej vetvy. Keďže obe majú rovnaký odpor, prúd na oboch bude rovnaký, teda

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_z}{R_m} = \frac{U_z}{2R_m}.$$

Napätie na každom z nich bude zas $\frac{U_z}{2}$. Prúd I_2 preteká každým z motorčekov, preto výkon každého z nich bude

$$P_2 = \frac{U_z}{2} \cdot \frac{U_z}{2R_m} = \frac{U_z^2}{4R_m},$$

štyri v súčte budú mať teda výkon

$$P_{2c} = 4 \cdot \frac{U_z^2}{4R_m} = \frac{U_z^2}{R_m}.$$

Keď túto hodnotu porovnáme s P_{1c}, zistíme, že

$$P_{2c} = \frac{U_z^2}{R_m} = 4 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{U_z^2}{R_m}\right) = 4 \cdot P_{1c},$$

teda takýmto prepojením motorčekov sme dosiahli štvornásobný výkon.

Paralelné zapojenie

A čo tretie zapojenie? Napätie sa nám deliť nebude, nič nie je s ničím v sérii, teda $U_3 = U_z$. Odpor celého zapojenia bude štvrtinou odporu každého z motorčekov, teda $R_3 = \frac{R_m}{4}$. Celkový prúd bude teda

$$I_{3c} = \frac{U_3}{R_3} = U_z : \frac{R_m}{4} = \frac{4U_z}{R_m}.$$

Prúd sa nám bude deliť na štvrtiny, pretože ide do štyroch rovnakých vetiev.

$$I_3 = \frac{I_{3c}}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4U_z}{R_m} = \frac{U_z}{R_m}.$$

Výkon bude teda

$$P_3 = U_3 I_3 = U_z \cdot \frac{U_z}{R_m} = \frac{U_z^2}{R_m}.$$

[4]Niektorí z vás možno poznajú zjednodušenú verziu pre dva rezistory - $R_c = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, či dokonca vedia, že pokiaľ sú tieto dva rezistory rovnaké, ich odpor je polovicou odporu jedného z nich. A pokiaľ máme paralelne N rovnakých rezistorov s odporom R, odpor tohoto zapojenia bude $\frac{R}{N}$.

Aby sme vypočítali celkový výkon štyroch takýchto motorčekov, stačí nám to vynásobiť štyrmi a zistíme, že

$$P_{3c} = 4 \cdot \frac{U_z^2}{R_m} = 4 \cdot P_{2c},$$

teda výkon sa nám zas zvýšil, a opäť štvornásobne. Znamená to teda, že zmenou zapojenia sa naozaj zmení i výkon, a to vieme vyjadriť pomerom $P_{1c} : P_{2c} : P_{3c} = 1 : 4 : 16$.

Má to však i reálne využitie? Áno, má. Skutočná lokomotíva má 4 trakčné motory, obrovské elektromotory, každý s výkonom asi 15-krát väčším ako auto. Keď sa rozbieha, tieto sú v sérii. No a postupom času, keď chceme od lokomotívy vyšší výkon, preradia sa na pararelné zapojenie, čím sa výkon naozaj zvýši. Ako sme práve vypočítali, šestnásťnásobne.