Riešenia 2. kola letnej časti

2.1 Veslica

vzorák **Marianka**, opravovala **Marianka**

Krtko zobral svoju lopatku a vybral sa na jazero. Chce prejsť nejakú pevnú vzdialenosť tam a späť po jazere a zistiť, koľko času mu to zaberie. Vzdialenosť tam a späť si môžeme označiť ako $2s$. Keďže chceme zistiť čas, použijeme rovnicu $t_j = \frac{2s}{v_K}$.

Teraz sa zvedavý Krtko presunie aj so svojou lopatkou ku rieke a snaží sa zistiť rovnakú vec. Pri rieke je to ale zapeklitejšie, pretože rieka tečie nejakou svojou rýchlosťou v_r. Rieka musí tiecť pomalšie, ako je Krtkova rýchlosť, lebo ak by išiel Krtko proti prúdu, ktorý je rýchlejší ako on sám, posúvalo by ho dozadu. Pevná vzdialenosť a Krtkova rýchlosť sa nezmenili, takže stále musí prejsť vzdialenosť s s rýchlosťou v_K. Tentokrát však ide proti prúdu, takže ho rieka bude spomaľovať. Čas si teda vyjadríme ako $t_1 = \frac{s}{v_K - v_r}$. Keď pôjde späť, pôjde po prúde, takže ho rieka bude zrýchľovať. To si zase vyjadríme ako $t_2 = \frac{s}{v_K + v_r}$. Takže celkový čas bude $t_r = t_1 + t_2 = \frac{s}{v_K - v_r} + \frac{s}{v_K + v_r}$.

Sedláckym rozumom by sme povedali, že časy, za ktoré prešiel pevnú vzdialenosť tam a späť na jazere a rieke, budú rovnaké, keďže na rieke cestou tam stratil nejaký čas, ktorý potom „dobehol“ cestou späť. Opak je však pravdou. Keď máme vzorec $t_r = \frac{s}{v_K - v_r} + \frac{s}{v_K + v_r}$, vieme si ho upraviť na

$$\begin{aligned} t_r &= \frac{s(v_K + v_r)}{(v_K - v_r)(v_K + v_r)} + \frac{s(v_K - v_r)}{(v_K - v_r)(v_K + v_r)} \\ &= \frac{s(v_K + v_r) + s(v_K - v_r)}{(v_K - v_r)(v_K + v_r)} \\ &= \frac{sv_K + sv_r + sv_K - sv_r}{v_K^2 + v_K v_r - v_K v_r - v_r^2} \\ &= \frac{2sv_K}{v_K^2 - v_r^2} \\ &= \frac{2s}{v_K - v_r^2}. \end{aligned}$$

Poďme si tieto dva časy porovnať. Vždy bude platiť, že

$$\frac{2s}{v_K} < \frac{2s}{v_K - v_r^2}.$$

Vidíme, že Krtkovi trvá dlhšie prejsť pevnú vzdialenosť tam a späť po rieke, ako po jazere. Je to kvôli tomu, že čas, ktorý prejde po riekem má v menovateli Krtkovu rýchlosť mínus rýchlosť rieky na druhú, takže menovateľ bude menší ako pri čase, ktorý prejde na jazere. To znamená, že po vydelení zlomku budeme mať väčšie číslo, ako pri čase na jazere.

2.2 Kockaté kolesá

vzorák **Marek**, opravoval **Marek** a **Gabo**

Najprv preskúmajme, čo znamená odskočiť. Určite to bude znamenať, že kockaté kolesá sa nebudú dotýkať zeme. To určite nastane, keď stred kolesa bude ďalej od vozovky, ako je vzdialenosť k rohu. Na to, aby sme pochopili takýto jav, sa musíme pozrieť na pohyb kockatého kolesa, kým neodskakuje. Pri skúmaní tohoto pohybu však zistíme, že stred kolesa sa pohybuje po kružnici so stredom vo vrchole kocky. Po tom, ako kocka padne na hranu, sa začne pohybovať okolo ďalšieho rohu. Tým pádom aj ťažisko auta bude vykonávať pohyb po kružnici s rovnakým polomerom.

To nám napovedá, že budeme skúmať otáčavý pohyb. Keď sa bod na kružnici pohybuje rýchlejšie, ako dostredivá sila zvláda kompenzovať tento pohyb, koleso by malo vybočiť z kružnicovej dráhy. Taký jav si vieme predstaviť, aj keď napríklad rozkrútime závažie na šnúrke, ktorá sa následne pretrhne a kvôli absencii dostredivej sily závažie odletí preč.

Tu však neprerušíme silu úplne, len by sme radi prekročili limit – tak, ako keď naša ruka už nevie zostať na mieste, lebo ju závažie ťahá preč. Náš limit je však gravitačná sila pôsobiaca na auto. Túto silu vieme vyjadriť ako

$$F = mg.$$

Dostredivú silu, ktorá ťažisko auta drží na tej správnej kružnici, možno vyjadriť známym vzorcom $F_d = \frac{mv^2}{r}$, kde r je polomer kružnice. Vieme však, že r je polovica uhlopriečky štvorca, a teda $r = \frac{\sqrt{2}d}{2}$. Takže ak $F < F_d$, ťažisko auta sa už nebude pohybovať po kružnici a kolesá budú odskakovať od vozovky. Takže musí nutne platiť

$$mg < \frac{mv^2}{r},$$

a teda

$$\sqrt{gr} < v.$$

Teraz dosadíme $r = \frac{\sqrt{2}d}{2}$ a máme:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}dg} < v.$$

Výraz naľavo je teda dolným odhadom rýchlosti, pre ktorú auto nadskakuje. Teda ak rýchlosť bude menšia alebo rovná, bude jazda ešte ako-tak pohodlná.

2.3 Voňavé tyčinky

vzorák **Kebab**, opravoval **Kebab**

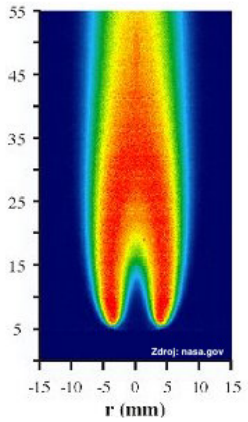
Na začiatok si zadefinujme, ako budeme určovať uhly. Dohodnime sa preto, že uhol 0° značí, že bude špajdľa smeruje vertikálne dohora, resp. ju budeme zapaľovať podobne ako sviečku na stole. Uhol 180° bude vertikálne, ale smerom nadol.

Teória

Ako prvé pozorovanie je potrebné si uvedomiť, že nás nezaujíma rotácia sviečky v y-ovom smere (napr. keď sa točí stolička). Je to dôsledok toho, že hlavný vplyv na náš jav má gravitačná sila Zeme[1]. Každá situácia, ktorá bude vzhľadom na túto silu rovnaká, bude mať rovnaký výsledok (ak neberieme do úvahy prúdenie vzduchu v miestnosti, nerovnomernosť špajdle…). Iné uhly ako od 0° po 180° nás v skutočnosti nezaujímajú.

[1] Môžte sa zamyslieť, ako by horela sviečka vo vesmíre, kde nie je ťiažové zrýchlenie. Hint video: https://www.youtube.com/watch?v=Gecui7ygtjY

Teraz si niečo povedzme o horení. Vieme, že aby mohlo dochádzať k horeniu, musia byť splnené tri podmienky: prítomnosť kyslíka, horľavá látka a teplota vzplanutia. Prvé dve v našom pokuse nehrajú žiadnu rolu, takže sa zamerajme na tú tretiu. Každá horľavá látka má určitú teplotu, pri ktorej začne s dostatkom kyslíka horieť. Pre drevo je to niečo okolo 250 °C. Na začiatku je teda nutné zapáliť špajdľu touto teplotou a potom musí sama dohorieť do konca bez vonkajšej pomoci. Na to však potrebuje sama vyvinúť v smere špajdle aspoň zápalnú teplotu. Pozrime sa preto teraz na to, ako to vyzerá s teplom okolo plameňa.



Obrázok 1: *Teplotný prierez plameňa*

Ako aj obrázok hovorí, najväčšie teploty dosahuje vzduch nad plameňom. Do strán a dodola sa teplota stráca omnoho rýchlejšie. To je spôsobené obyčajným javom a to tým, že čo je hustejšie, klesá dole. Teplý vzduch je menej hustý, lebo, zjednodušene povedané, molekuly majú väčšiu energiu a teda si „vyboxovali“ medzi ostanými okolo seba viac miesta. Ale prečo ide hustejšie dole? Či už héliový balón, alebo polystyrén vo vode spája veľmi známy – Archimedov zákon. Teleso ponorené do…

Vysvetlenie tohoto javu je v tom, že na spodnú časť balóna pôsobí väčší tlak smerom nahor. (atmosférický tlak, ktorý závisí od stĺpca vzduchu nad ním jem vyvolaný gravitačným poľom Zeme. Aha! Tak tu je tá gravitácia!) V súčte síl na plochu bude balón nadnášaný silou rovnou tiaži okolitého vzduchu. Keby bol ale balón hustejší, ako okolitý vzduch, táto sila by nestačila, aby ho zdvihla. Teplý vzduch ide hore a s ním aj teplo, ktoré zapáli ďalšiu časť špajdle.

Na obrázku jednotlivé farby znázorňujú teplotné hranice – izotermy. Nás zaujíma tá, kde je teplota rovná našej zápalnej teplote 250 °C. Preto všetko vnútri tejto krivky sa vznieti a oheň, ktorý sme zapálili, môže pokračovať ďalej. (Túto izotermu ovplyvňuje aj špajdla sama o sebe, keďže drevo prenáša teplo o niečo inak ako vzduch. Táto zmena je však naozaj minimálna a nebudeme je teda brať do úvahy.) Netreba však zabúdať, že kúsok špajdle tiež nehorí donekonečna a časom sa horenie pre nedostatok horľavej látky zastaví. Taktiež kým určitá teplota zapáli špajdlu, tiež netrvá nulový čas. Aby mohol plameň pokračovať, je nutné, aby čas na zapálenie bol menší, ako čas, kým daný plameň vyhasne. Tento fakt spôsobí, že naša izoterma sa ešte trošku zúži smerom k plameňu.

Jej výsledný tvar má zodpovedať závislosti, ktorú hľadáme. Špajdla smerom dodola (uhol 180°) bude mať najväčšiu časť špajdle vnútri krivky, naraz sa zapáli najväčšia časť z nej a teda čas, kým zhorí celá špajdla bude najmenší. Postupným nakláňaním sa dĺžka špajdle vnútri krivky zmenšuje a teda čas sa bude zväčšovať.

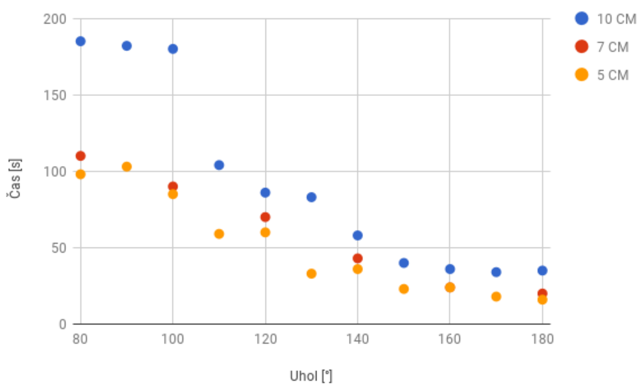
Meranie

Našou úlohou bolo zmerať, koľko potrvá, kým zhorí špajdla v závislosti od uhla pod ktorým je naklonená. Špajdlu si uchytíme do stojana (aby sme nezašpinili okolie, pod špajdľu môžeme položiť papiere či igelitky).

Aby sme sa neudusili, bolo lepšie vetrať miestnosť, keďže sa počas experimentu vytvorilo dosť veľa uhličitanov. To však iba pre bezpečnosť práce. Pre zjednodušenie merania si na každej špajdli vyznačíme rovnakú vzdialenosť od konca a meriame, kým plameň nepríde do daného bodu. Výsledná závislosť sa nezmení, keďže rýchlosť, akou sa plameň hýbe, nie je ovplyvnená dĺžkou špajdle. Budeme merať pre tri vzdialenosti: 10 cm, 7 cm a 5 cm od konca. Pre 7 cm sme nakoniec spravili o kúsok menej meraní.

Špajdle zapalime takým spôsobom, aby sme mohli s nejakou presnosťou povedať, kedy bola zapálená. Napríklad keď podložíme zapalovač pod koniec špajle a keď sa špajdľa zapáli s určitou intenzitou, spustíme stopky. Časomieru zastavíme v momente, keď spodná časť plameňu dosiahla vyznačený bod, ktorý meriame. Keďže to bolo ale pri menších uhloch kvôli dĺžke plameňa ťažké určiť, koniec určíme vtedy, keď sa dané miesto zdeformuje. Oheň totiž za sebou nenechával rovnú, ale zuhoľnatenú a pootáčanú špajdľu. Keďže ale ani toto nebolo vždy presné, odhadovaná odchýlka od skutočného času je ±4 s.

Uhol	$t[s]$ pre 5 cm	$t[s]$ pre 7 cm	$t[s]$ pre 10 cm
180°	16	20	35
170°	18		34
160°	24	24	36
150°	23		40
140°	36	43	58
130°	33		83
120°	60	70	86
110°	59		104
100°	85	90	180
90°	103		182
80°	98	110	185



Obrázok 2: *Graf závislosti času zhorenia špajdle od uhlu naklonenia*

Záver

Ako vidno v grafe, teória sa nám potvrdila, keďže sa so zvyšujúcim uhlom znižuje čas zhorenia. Počas merania ale nastala jedna zaujímavosť: od určitého uhla (približne 75°) smerom k 0° už plameň nevedel dôjsť k vyznačenému bodu, ale po chvíli zhasol. To znamená, že v daných stupňoch sa špajdľa nenachádzala vnútri izotermy. Teda čas potrebný na prenos tepla bol väčší, ako čas horenia kúsku špajdle. Tieto merania sme nezahrnuli, no je fajn si uvedomiť, že od určitého uhla špajdľa nevie zhorieť celá.

2.4 Vrtuľník

vzorák **Marcel**, opravoval **Marcel**

Pozrime sa na taký vrtuľník. Čo na ňom vidíme? Vo väčšine prípadov jednu veľkú vrtuľu, ktorá je vodorovne, a druhú malú, kolmo na ňu. Na čo slúži vrtuľníku tá veľká vrtuľa? Táto vrtuľa vytvára potrebný ťah na to, aby sa vrtuľník vznášal, stúpal, jednoducho pôsobí proti tiažovej sile. Pozrime sa na to, ako vrtuľa takúto silu vytvára.

Táto sila sa volá *ťah* a ten vzniká tak, že vrtuľa urýchľuje prúd vzduchu (toto neplatí len pri vrtuli, ale na rovnakom princípe fungujú aj prúdové motory. V takom prípade prúdový motor urýchľuje prúd vzduchu.). Z tretieho Newtonovho zákona akcie a reakcie platí, že ak je prúd vzduchu urýchľovaný dozadu, vrtuľa (a všetko čo je k nej pripevnené, čím je celé lietadlo, alebo vrtuľník) je urýchľovaná dopredu. Ako ale vrtuľa tento prúd vzduchu urýchľuje?

Vrtuľa rotuje, a na základe toho na nej (podobne ako na krídlach na lietadle) vzniká rozdiel tlakov na vrchnej a spodnej strane vrtuľového listu, a teda vrtuľa vytvára vztlak. Toto ale nehovorí vôbec nič o tom, prečo by mala byť na vrtuľníku aj nejaká iná vrtuľa, a ešte k tomu tak divne otočená.
Dôvod je ten, že na vrtuľa nevytvára len ťah, ale aj iné sily a momenty síl, ktoré je treba kompenzovať, ako je gyroskopický moment a reakčný moment vrtule.

Gyroskopický moment vzniká preto, lebo vrtuľa je pomerne ťažká, a otáča sa s vysokými otáčkami, a teda pôsobia ako zotrvačník. Gyroskopický moment vzniká vtedy, keď sa zmenia otáčky na vrtuli. Skúsiť si to doma môžete tak, že si doma roztočíte vĺčik, a skúsite ním otáčať okolo rôznych osí. Budete vidieť zmeny v tom, akou silou musíte pôsobiť.

Druhým momentom je **reakčný moment vrtule**. Skúsme si predstaviť vrtuľu ako rovnú dosku, ktorá sa otáča tak, že má veľkú čelnú plochu a teda aj veľký aerodynamický odpor.
A keďže tretí Newtonov zákon stále platí, vieme povedať, že ak má vrtuľa má nejaký aerodynamický odpor a vrtuľník je vo vzduchu, reakčná sila (alebo teda moment) vzduchu otáča vrtuľníkom.

Predstavme si extrémny prípad, kde vrtuľu niečo pevne drží, aby stála na mieste. Vrtuľník by visel vo vzduchu, a ako by sa snažil ňou točiť, začal by sa točiť sám. Vrtuľa na chvoste vrtuľníka sa odborne volá *vyrovnávací rotor*, preto, lebo vyrovnáva momenty a sily, ktoré na vrtuľníku za letu vznikajú. Samozrejme vyrovnávací rotor slúži aj na natáčanie vrtuľníka doprava a doľava.

Pilot vyrovnávací rotor riadi nohami (má dva pedále, navzájom spriahnuté, teda keď ide jeden dozadu, druhý pôjde dopredu a tým sa dá riadiť zatáčanie vrtuľníka okolo zvislej osi doprava a doľava).
V niektorých druhoch vrtuľníkov sa vyrovnávací rotor s normálnou vrtuľou nahrádza systémom Fenestor (vrtuľa, ktorá je v chvoste), alebo NOTAR (vyfukovanie prúdu vzduchu). Je to z toho dôvodu, že vrtuľa je veľmi náchylná na poškodenie cudzími predmetmi.
A na záver ešte jeden vtip, ktorý koluje medzi pilotmi lietadiel:

> „Vrtuľníky nemôžu lietať. Iba sú také škaredé, že ich zem odpudzuje.“

2.5 Prevodovka

vzorák **Nina**, opravovala **Nina**

Každý, kto sa už pri bicyklovaní hral sa prevodmi na bicyklim si určite všimol, že po zaradení ľahšieho prevodu stačí na otočenie pedálov menšia sila, zatiaľ čo po zaradení ťažšieho potrebuje na otočenie pedálov vynaložiť väčšie úsilie. Rovnako ste si asi všimli, že pri ťažšom prevode nám treba na udržanie určitej rýchlosti spraviť menej záberov pedálmi ako pri ľahšom prevode.

Tu si treba uvedomiť, že práca, ktorú pri bicyklovaní vykonáme na prejdenie určitej vzdialenosti sa nezmení. A teda ak napríklad zaradíme ľahší prevod, čiže budeme na pedále pôsobiť menšou silou, budeme musieť touto silou pôsobiť po dlhšej dráhe, čiže budeme musieť spraviť viac záberov pedálmi. Poďme si tieto dva prípady porovnať.

Práca, ktorú Marek vykoná pri jednom otočení pedálov, je rovná nárastu jeho potenciálnej energie. Predpokladajme, že Marek pôsobí na pedále rovnomerne a vždy kolmo na kľuky. Potom ak dĺžka kľúk je r_1, Marek pôsobí nejakou silou F_1 po dráhe $2\pi r_1$ a teda pri jednom otočení pedálov vykoná prácu $W = F_1 \times 2\pi r_1$.

Označme si polomer predného ozubeného kolieska ako r_2 a zadného ako r_3. Potom na jedno otočenie pedálov sa reťaz na bicykli posunie o obvod predného ozubeného kolieska, teda o $2\pi r_2$. Podobne na jedno otočenie zadného kolieska treba reťaz posunúť o $2\pi r_3$, čiže zadné koliesko sa pri jednom otočení predného kolieska otočí (r_2/r_3)-krát. To ale znamená, že (r_2/r_3)-krát sa otočí aj zadné koleso bicykla, čiže Marek prejde vzdialenosť $2\pi R\frac{r_2}{r_3}$, kde R je polomer zadného kolesa.

Označme si sklon kopca, do ktorého Marek stúpa, ako α. Potom Marek na jedno otočenie pedálov vystúpi o $2\pi R\frac{r_2}{r_3}\sin(\alpha)$ vyššie a teda jeho polohová energia narastie o $F_g \cdot 2\pi R\frac{r_2}{r_3}\sin\alpha$, kde F_g je tiažová sila pôsobiaca na Mareka aj s bicyklom.

$$W = F_1 \times 2\pi r_1 = F_g \times 2\pi R\frac{r_2}{r_3}\sin(\alpha) = \Delta E_p F_1 = \frac{r_2}{r_3}mg\frac{R}{r_1}\sin(\alpha)$$

Tu si všimnime, že jediná časť tejto rovnice, ktorú vie Marek pri bicyklovaní ovplyvniť, je $\frac{r_2}{r_3}$. Vieme, že obvod kružnice je lineárne závislý od jej polomeru, preto

$$\frac{r_2}{r_3} = \frac{\text{počet zubov na prednom prevode}}{\text{počet zubov na zadnom prevode}}.$$

Nech pre ukážku Marekov bicykel má na prednom prevode 44 a 24 zubov a na zadnom 32 až 11. Potom, ak by do kopca ťahal, kým by mal zaradené 44/11, potreboval by na to silu $F_1 = \frac{44}{11}mg\frac{R}{r_1}\sin\alpha$, a ak by mal zaradené 24/32, tak $F_2 = \frac{24}{32}mg\frac{R}{r_1}\sin\alpha = \frac{3}{16}F_1$.

Tu vidíme, že ak by si Marek pri stúpaní do kopca preradil z naťažšieho prevodu na najľahší, potreboval by na pedále pôsobiť len $\frac{3}{16}$ pôvodnej sily. Dodajme však, že by musel ale aj urobiť $\frac{16}{3}$-krát viac otočiek pedálov, pretože práca potrebná na vystúpanie na kopec sa nezmenila.

Navyše si ešte môžeme všimnúť, že ak by mal Marek zaradený najťažší prevod a pre uhol α by platilo, že $\sin\alpha \geq \frac{r_1}{4R}$, tak

$$F_1 = \frac{44}{11}mg\frac{R}{r_1}\sin(\alpha) \geq \frac{44}{11}mg\frac{R}{r_1}\frac{r_1}{4R} = mg = F_g.$$

To by znamenalo, že Marek by musel na pedále pôsobiť väčšou silou, ako je jeho tiaž. To je dosť náročné, keďže bežne pedále bežne otáčame práve prenášaním vlastnej hmotnosti z jedného na druhý, a v tomto prípade by to určite nestačilo.